ACTA GEOGRAPHICA UNIVERSITATIS COMENIANAE No. 50, 2008, pp. 33-61

EXAKTNE POŇATÁ GEOMORFOMETRIA GEORELIÉFU AKO ZVLÁŠTNEHO SUBSYSTÉMU KRAJINY A JEHO GEOMETRICKÁ ŠTRUKTÚRA; PROFESOR MICHAL LUKNIŠ, JEHO ZÁSLUHA A VPLYV NA JEJ ROZVOJ

Jozef Krcho, Alexandra Benová

Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta, Katedra kartografie, geoinformatiky a diaľkového prieskumu Zeme, Mlynská dolina, 842 15 Bratislava

Abstract: Problem of exact conception of morphometric analysis of georelief on the basis of geometric aspect of the field theory is analysed in the paper. Continuing to the cited papers is summarily analysed georelief geometric structure expressed by set of morphometric quantities. The paper is dedicated to bright memory of profesor Michal Lukniš.

Keywords: system, geosystem, spatial organisation, georelief geometric structure, morphometric quantities, altitude gradient, slope in the direction of slope curves, orientation of georelief to cardinal points, normal curvatures of georelief, horizontal curvature of georelief, georelief geometric forms, Dupin indikatrix.

1. PROF. M. LUKNIŠ, JEHO ZÁSLUHA A VPLYV V BÝVALEJ ČSFR NA ROZVOJ GEOMORFOMETRIE, EXAKTNE POŇATEJ NA BÁZE GEOMETRICKÉHO ASPEKTU TEÓRIE POLÍ

Až teraz, s odstupom štyridsaťšesť rokov (1962 – 2008), teda takmer už pol storočia, možno širšie zodpovedne zhodnotiť vplyv a zásadné zásluhy vedecky i mravne veľkej osobnosti, prof. M. Lukniša, na rozvoj exaktne matematicko-fyzikálne poňatej geomorfometrie georeliéfu ako priestorovo organizovaného subsystému krajiny. Možno tak s plnou zodpovednosťou učiniť s odstupom dostatočne dlhej doby; to znamená v čase, keď prvá generácia exaktne založených a vzdelaných odchovancov z oblasti matematicko-fyzikálne poňatej geomorfometrie, modelovania georeliéfu a teórie systémov a geosystémov dosahuje už 50 a viac rokov a druhá, či dva a poltá ešte širšia generácia dosahuje už 30 až 35 rokov. K tejto poslednej generácii patrí aj druhá autorka tejto práce, žiačka prvého autora. Pritom začína už vyrastať tretia generácia geografickej obce a príbuzných vedných odborov, pre ktorú v kontexte s medzinárodnou vedou sú širšie teoretické i interdisciplinárne aplikačné znalosti z tejto oblasti ako aj z oblasti modelovania georeliéfu pomocou komplexne poňatých digitálnych modelov a z oblasti modelovania priestorovej štruktúry krajiny pomocou komplexného digitálneho modelu priestorovej štruktúry v prostredí GIS-technológií samozrejmosťou.

Začiatky geomorfometrie, ktoré sa datujú rokom 1962, boli veľmi ťažké. Jednak na katedrách geografie neexistovala základná výpočtová technika s výnimkou niekoľkých ručných mechanických kalkulačiek a jednak geografická obec hlavne v univerzitných kruhoch nebola ešte vôbec pripravená akceptovať takúto koncepciu a smer bádania na univerzite. Navyše vtedajšej dobe bola veda na univerzitách vtedajšej ČSSR koncepčne v podstate odsunutá na vedľajšiu koľaj a za ťažisko náplne bola postavená výučba. Skutočnosť silnej spätnej väzby medzi vedou a univerzitnou výučbou, ako aj jej zásadného vplyvu na formovanie spôsobu myslenia univerzitných poslucháčov, sa príliš nezohľadňovala. Vyplývalo to jednak z nedostatku tradície na jeho vysokých školách a jednak z toho, že iba nedávno pred tým, pred dvanástymi rokmi na začiatku 50. rokov, bola podľa sovietskej koncepcie založená SAV, do ktorej väčšinou odišli, alebo boli presunuté talentované, vedecky založené univerzitné kádre a mnohí vedecky založení univerzitní vedecko-pedagogickí pracovníci prechodne pracovali súčasne na univerzite aj na SAV a boli poverení budovaním jej ústavov. Takáto zmena bola na Slovensku obzvlášť citeľná.

Na Univerzite Karlovej v Prahe bola síce situácia koncepčne taká istá, na novobudovanú ČSAV tak isto odišli, alebo boli presunuté hlavné ťažiskovo vedecky založené univerzitné kádre, avšak dlhodobá silná vedecká tradícia na Karlovej univerzite nemala na jej ducha tak veľký negatívny dopad. Naviac mnohí jej profesori napriek lákavým ponukám odmietli na novo budované pracoviská ČSAV prejsť, lebo novej koncepcii príliš nedôverovali a považovali ju (žiaľ hlboko sa mýliac) za dočasnú, čo aj verejne pred svojimi poslucháčmi v posluchárňach často krát deklarovali.

Jednou zo silných vedeckých osobností v oblasti bádania georeliéfu na báze teórie polí bol na Univerzite Karlovej v Prahe geofyzik a kartograf prof. Bedřich Šalamon. Na Univerzite Komenského v Bratislave to bol v oblasti geomorfológie prof. Michal Lukniš, ktorý bol v tom čase zároveň aj hlavným redaktorom Geografického časopisu na SAV. Obaja mali zásadný podiel na budúcom rozvoji nie len náročného aparátu exaktne matematicko-fyzikálne poňatej geomorfometrie, ale do značnej miery aj kvantitatívnej geomorfológie ako vednej disciplíny. Prvý vychoval svojich nasledovníkov, druhý sa zasadil o ich existenciu a jej záchranu, ako aj o nasledovný intenzívny rozvoj tejto vednej disciplíny na Univerzite Komenského.

V prvých piatych rokoch 1962 až 1967 vyšlo prvých šesť vedeckých prác z oblasti exaktne poňatej morfometrickej analýzy a dynamiky oslnenia georeliéfu, z toho päť v Geografickom časopise výslovnou zásluhou prof. M. Lukniša. V roku 1964 boli už z oblasti Bratislavy a z oblasti Košickej kotliny vypracované a publikované farebné izočiarové mapy výškových gradientov a izoklín s náčrtom geometrických foriem georeliéfu, pričom reliéf bol koncepčne poňatý ako osobitná súčasť geografickej sféry. Preto bola súčasne intenzívne rozpracúvaná koncepcia geografickej sféry ako priestorovo organizovaného systému.

Geografická sféra ako priestorovo organizovaný a priestorovo diferencovaný systém bola u nás v nadväznosti na prácu Chorley, R. J., Kennedy, B. A. (1971) prvý krát formulovaná v období rokov 1964 až 1966. Výsledný rukopis tejto práce bol následne pod názvom „Geosféra ako kybernetický systém a jej vyjadrenie v mape“ zadaný do redakcie Geografického časopisu SAV koncom roka 1966. Paralelne s touto prácou bola formulovaná filozoficky hlboko fundovaná zásadná teoretická práca J. Paulova. Obe práce vzbudili rozruch, ktorý vústil do búrlivých polemík. Na jednej z takýchto polemík. ktorá bola existenčne kľúčová a na ktorej diskusiu riadil prof. Lukniš, výsledok diskusie stručne ale výstižne zhrnul do nasledujúceho výroku: „Diskusia a jej výsledky ukázali. že silní nie sú tak silní a slabí nie sú tak slabí“.

Po intenzívnych až búrlivých polemikách v priebehu roka 1966 až do polovice roka 1968, ktoré postupne prešli do emocionálne síce náročných, ale už racionálnejších diskusií, bola práca „Geosféra ako kybernetický systém a jej vyjadrenie v mape“ výslovnou zásluhou profesora M. Lukniša v roku 1968 publikovaná v Geografickom časopise. Prof. Michal Lukniš, ako sme už uviedli, bol v tom čase hlavným redaktorom Geografického časopisu takže z postu svojej funkcie, ako aj na základe rozsiahlych kladných oponentských posudkov jej prijatie v redakčnej rade na uverejnenie presadil. Voči práci J. Paulova bolo však nepochopenie vtedajších vedúcich predstaviteľov vedeckej geografickej obce tak veľké, že profesor Lukniš si za vtedajšej politickej situácie aj napriek svojmu postaveniu a autorite, nemohol dovoliť prijatie tejto práce vo vtedajšej celkovej situácii presadiť. Táto práca však svojou filozofickou fundovanosťou vzbudila veľkú pozornosť súčasne aj vo filozofických kruhoch, v ktorých sa stretla s uznaním a pochopením, takže potom koncepčne v úplnosti avšak s akcentom na filozofické aspekty problému vyšla nie v Geografickom časopise, ale vo Filozofickom časopise.

Názory a postoje vedúcich vedeckých činiteľov geografickej obce sa postupne zmenili, takže práce publikované v rokoch 1968 až 1972 boli uverejnené bez akýchkoľvek problémov.

Osobitnú, do slova kľúčovú úlohu však zohral prof. Lukniš pri rozsiahlej a svojím významom zásadnej práci „Morphometric analysis of relief on the basis of geometric aspect of field theory“ uverejnenej ako monografická práca v Acta geographica Universitatis Comenianae, Geographico-physica Nr. 1, 1973, kde bol prof. Lukniš až po jej tlač hlavným redaktorom.

Jeho výsostnou zásluhou bola práca celá uverejnená v angličtine, s rozsiahlym nemeckým a slovenským resumé pri každej kapitole. Tak isto jeho výlučnou zásluhou boli jej súčasťou farebné mapy a grafy jednak v texte a jednak vo forme osobitnej sady farebných morfometrických izočiarových máp. Táto práca však už nevyšla pod jeho menom ako hlavného redaktora, lebo keď už bola vo finálnom štádiu vytlačená, ale ešte nezviazaná, bol prof. Lukniš ako nestraník z postu hlavného redaktora odvolaný, tlačový hárok vytlačený s jeho menom ako hlavného redaktora bol stiahnutý a vytlačený znovu už pod iným hlavným redaktorom.

Na výslovné želanie prof. Lukniša zmenil autor práce svoje pôvodné venovanie a venoval prácu svetlej pamiatke profesora B. Šalamona, ktorý medzičasom zomrel a ktorý si to plne zaslúžil. Preto mohol autor prof. Luknišovi venovať až ďalšiu svoju monografiu

„Morfometrická analýza georeliéfu a jeho digitálne modely“, ktorá vyšla vo vydavateľstve SAV „VEDA“ v roku 1990. Žiaľ, pretože profesor Lukniš medzičasom zomrel, mohol ju autor venovať už iba jeho svetlej pamiatke.

Preto je jeho pamiatke s hlbokou úctou venovaná aj táto práca, v ktorej sú veľmi stručne zhrnuté doterajšie priebežné výsledky exaktne poňatej geomorfometrickej školy uvažovanej na báze geometrického aspektu teórie polí a všeobecnej teórie systémov a geosystémov, a ktorá by svoje krehké začiatky na Univerzite Komenského v Bratislave bez profesora Lukniša s pravdepodobnosťou hraničiacou s istotou neprežila.

2. STRUČNÁ CHARAKTERISTIKA PROBLÉMU

Ako sme už uviedli, cieľom tejto práce je doterajšie stručné prierezové súhrnné vyjadrenie teoretickej koncepcie georeliéfu uvažovaného ako zvláštneho priestorovo organizovaného subsystému $\mathbf{S}_{RF}(P, T)$ geografickej sféry a modelovanie jeho geometrickej štruktúry pomocou jeho komplexného digitálneho modelu (KDMR). Tento model (KDMR) je svojou koncepciou potenciálne v práci Krcho, J. (1990) výsledne uvažovaný ako integrálna súčasť všeobecne uvažovaného GIS-u tak, aby v ňom bolo možné množinu morfometrických veličín využiť ako množinu vstupných veličín pri modelovaní priestorových interakcií georeliéfu s ostatnými zložkami prírodnej krajiny. Predtým však bol už KDMR ako integrálna súčasť budovaného Hydrometeorologického informačného systému vyjadrený a programovo komplexne spracovaný a funkčne verifikovaný v práci Mičietová, E. (1985). Všeobecná teoretická koncepcia GIS-ov bola pritom z tohto hľadiska ďalej načrtnutá v prácach Krcho, J., Mičietová, E. (1989a, 1989b).

V nadväznosti na citované práce o georeliéfe pritom uvažujeme ako o zvláštnom subsystéme $\mathbf{S}_{RF}(P, T)$ geografickej sféry uvažovanej ako priestorovo organizovaný systém $\mathbf{S}_G(P, T)$. Preto zároveň stručne vyjadríme paralelu medzi geografickou sférou ako priestorovo organizovaným systémom $\mathbf{S}_G(P, T)$ s jej zvláštnym subsystémom $\mathbf{S}_{RF}(P, T)$ na jednej strane a všeobecne uvažovanými GIS-mi na druhej strane, v ktorých je ako ich integrálna súčasť uvažovaný aj KDMR.

To znamená, že na základe stručnej charakteristiky geografickej sféry ako priestorovo organizovaného systému $\mathbf{S}_G(P, T)$ a georeliéfu ako jej zvláštneho subsystému $\mathbf{S}_{RF}(P, T)$, vyjadríme najprv v kontexte s GIS-mi a ich kartografickými bázami dát nasledujúce okruhy problémov:

- všeobecnú paralelu medzi množinou priestorovo diferencovaných prvkov $\boldsymbol{G}_G(P, T)$ systému $\mathbf{S}_G(P, T)$ a množinou priestorovo lokalizovaných objektov vo všeobecne uvažovanom GIS-e,
- základnú všeobecnú paralelu medzi množinou $\boldsymbol{Z}_G(P,T)$ priestorovo diferencovaných a časovo premenných stavových veličín $Z_i(P,T)$ systému $\mathbf{S}_G(P, T)$ a množinou polohovo a časovo diferencovaných atribútov charakterizujúcich množinu objektov takto uvažovaného GIS-u,
- dôležitosť množiny morfometrických veličín $\boldsymbol{G}_{RF}(P, T)$ a geometrickej štruktúry $\boldsymbol{R}_{RF}(\Delta P, T)$ georeliéfu ako subsystému $\mathbf{S}_{RF}(P, T)$ z hľadiska vyjadrenia vplyvu georeliéfu na priestorové rozloženie a diferenciáciu procesov v krajine uvažovanej ako ľubovoľne vybraná priestorovo vymedzená časť systému $\mathbf{S}_G(P, T)$,
- modelovanie georeliéfu ako subsystému $\mathbf{S}_{RF}(P, T)$ a jeho geometrickej štruktúry $\boldsymbol{R}_{RF}(\Delta P, T)$ pomocou komplexného digitálneho modelu reliéfu (KDMR) v kartografickom zobrazovacom 2D a 3D priestore, pričom KDMR je koncepčne ponímaný ako integrálna súčasť GIS-ov, v ktorých kartografický zobrazovací priestor tvorí základ pre kartografickú bázu dát GIS-ov.

V stručnosti preto v nadväznosti na už citované práce najprv súhrnne stručne načrtneme samotný pojem geografickej sféry, pojem krajiny, postavenie georeliéfu v krajine, ako aj jej reálny geometrický priestor vyjadrený vzhľadom na referenčnú plochu Zeme a jeho kartografický zobrazovací 2D a 3D priestor, ktorým je definovaný základ kartografickej bázy dát GIS-ov.

Následne na základe teórie systémov z hľadiska nášho cieľa stručne vyjadríme v zmysle prác Krcho, J. (1968, 1986, 1990, 1992 – 1993) geografickú sféru a jej krajinu ako priestorovo organizovaný systém $\mathbf{S}_G(P, T)$, a georeliéf ako ich osobitný subsystém

$S_{RF}(P, T)$. V nadväznosti na uvedené práce ako aj práce Krcho, J., Mičietová, E. (1989a, b), Krcho, J. (1990) ukážeme, že geografickú sféru ako systém $S_G(P, T)$ môžeme študovať z rôznych hľadísk, ktorým paralelne odpovedajú hľadiská koncepcie GIS-ov.

3. STRUČNÝ NÁČRT GEOGRAFICKEJ SFÉRY AKO PRIESTOROVO ORGANIZOVANÉHO CELOPLANETÁRNEHO KOMPLEXU, POJEM KRAJINY AKO JEHO ĽUBOVOĽNE VYBRANEJ PRIESTOROVEJ ČASTI A VYMEDZENIE JEHO GEOMETRICKÉHO PRIESTORU

Geografická sféra ako priestorovo organizovaný a priestorovo diferencovaný systém bola u nás v nadväznosti na prácu Chorley, R. J. (1962) prvýkrát formulovaná v období rokov 1964 až 1966 a publikovaná v roku 1968.

V nadväznosti na už uvedené práce v zozname literatúry pre úplnosť uveďme, že geografická sféra je chápaná ako celoplanetárny priestorovo organizovaný a diferencovaný komplex, ktorý pozostáva z dvoch navzájom autonómnych častí, ktoré sú v priestorovej interakcii a to: z prírodnej časti geografickej sféry a z humánnogeografickej, resp. socio-ekonomickej časti geografickej sféry. Ako prvý z nich v poradí, v nadväznosti na citované práce, načrtneme **prírodnú časť geografickej sféry** ako priestorovo organizovaný autonómny subsystém S_{FG}(P,T).

Prírodná časť geografickej sféry tvorí celoplanetárny priestorovo organizovaný 3D komplex, priestorovo vymedzený vzhľadom na referenčnú plochu Zeme. Pozostáva z jednotlivých navzájom na sebe závislých komponentov tvorených základnými zemskými sférami, ktoré sa navzájom priestorovo prenikajú a ktoré sú vo vymedzenom priestore v interakcii.

Týmito základnými komponentmi sú: *atmosféra, hydrosféra, litosféra, pedosféra, biosféra*. Interakcia týchto základných zemských sfér – geosfér je pre fungovanie a definíciu prírodnej časti geografickej sféry, ako aj pre vymedzenie jej geometrického 3D priestoru vzhľadom na referenčnú plochu Zeme kľúčová.

Priestorová organizácia prírodnej časti geografickej sféry a jej diferenciácia do priestorovo usporiadaných komplexov rôznych hierarchických úrovní je výsledkom interakcie základných zemských sfér – geosfér. Uveďme, že v rámci geosféry ako systému $S_G(P, T)$ je v literatúre vymedzený aj pojem krajiny. Krajina je v nej formulovaná ako vybraná priestorovo vymedzená časť geografickej sféry v jej ľubovoľnej oblasti, ktorá je v danej oblasti vnímaná ako celok vnútorne podrobnejšie diferencovaný a usporiadaný do jednotlivých krajinných jednotiek rôznych úrovní. V ňom a v jeho krajinných jednotkách v detailnejšej miere prebiehajú procesy s obehom látok, energie a informácie ako súčasť systému $S_G(P, T)$.

Zvláštnou zložkou prírodnej časti geografickej sféry je z hľadiska jeho geometrie **reliéf Zeme – georeliéf**. Jeho geometria výrazným spôsobom ovplyvňuje priestorovú diferenciáciu procesov v geografickej sfére ako celku. V priestore geografickej sféry je celoplanetárne vymedzený výškovým poľom definovaným výškami $\pm h$ v smere normál N k referenčnej ploche Zeme. Svojou geometriou tvorí oblasť intenzívnej interakcie jednotlivých základných zemských sfér – geosfér.

Ako druhý z nich v poradí, v nadväznosti na citované práce, načrtneme **humánnogeografickú, resp. socio-ekonomickú časť geografickej sféry** ako priestorovo organizovaný autonómny subsystém $\mathbf{S}_{AG}$(P,T).

Humánnogeografická, resp. socio-ekonomická sféra je chápaná ako ľudská spoločnosť s jej jednotlivými sférami ako jej zložkami a s komplexnou priestorovou aktivitou celoplanetárneho rozsahu. Pozostáva z rôznych základných zložiek tvoriacich základné sféry ľudskej činnosti, ktoré možno vyčleniť z rôznych hľadísk.

Jedným z hľadísk, podľa ktorých možno vymedziť jej základné zložky, je nasledujúce vymedzenie týchto základných zložiek: *lesohospodárska sféra, poľnohospodárska sféra, priemyselná sféra, sídelná sféra, dopravná a komunikačná sféra, riadiaca sféra a sféra služieb.*

Humánnogeografická sféra sa nachádza v reálnom geometrickom priestore prírodnej časti geografickej sféry, ktorá vytvára jej základné prírodné prostredie

---

***Poznámka* 1**. Reálny geometrický priestor geografickej sféry bol vzhľadom na referenčnú guľovú plochu Zeme vymedzený a presne definovaný v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda, h\rangle$ v práci KRCHO, J., (1990). V spojitom tvare bol na základe množín F $=\left\{A_i(\varphi_i, \lambda_i)\right\}_{i\in I}$ a $\mathrm{M}_i = \left\{A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i, h_{is})\right\}_{s\in S}$ vyjadrený množinou bodov $\mathrm{F_G} = \{M_i\}_{i\in I} = \left\{\left\{A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i, h_{is})\right\}_{s\in S}\right\}_{i\in I}$ a v diskrétnom tvare bol vyjadrený množinou ${}_D F_G = \left[\left[A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i, h_{is})\right]_{s=1}^{m}\right]_{i=1}^{n}$. Pritom **F** je množina bodov tvoriacich referenčnú guľovú plochu, kde **I** je indexová množina a *i* je vhodne volený identifikačný znak pre usporiadanú dvojicu (φ_i, λ_i), a $\mathbf{M}_i$ je množina bodov uvažovaná v intervale $\langle H_D, H_H\rangle$ na normále N_i vedenej k referenčnej ploche v každom jej bode $A_i(\varphi_i, \lambda_i) \in \mathbf{F}$, kde **S** je indexová množina a *s* je vhodne volený identifikačný znak pre hodnotu h_{is} na normále N_i. Veličina h_{is} vyjadruje teda na každej normále Ni ($i = 1, 2, \ldots$) prechádzajúcej bodom $A_i(\varphi_i, \lambda_i) \in \mathbf{F}$ referenčnej plochy Zeme polohu bodu $A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i, h_{is}) \in \mathbf{M}_i$ v intervale $\langle H_D, H_H\rangle$, pričom $(h_{is})_{min} = H_D$ a $(h_{is})_{max} = H_H$. Jeho abstraktný kartografický 2D a 3D zobrazovací priestor ako aj úplná operácia zobrazenia $\mathbf{F}_G: \rightarrow \mathbf{E}_G \wedge \mathbf{E}_G: \rightarrow \mathbf{F}_G$ bol definovaný v kartézskej súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z\rangle$. Tento abstraktný kartografický 2D a 3D zobrazovací priestor bol v spojitom tvare vyjadrený množinou $\mathrm{E_G} = \left\{\left\{A^*_{is}(x_i, y_i, z_{is})\right\}_{s\in S}\right\}_{i\in I}$ a v diskrétnom tvare množinou ${}_D\mathbf{E}_G = \left[\left[A^*_{is}(x_i, y_i, z_{is})\right]_{s=1}^{m}\right]_{i=1}^{n}$, kde ${}_D\mathbf{E}_G \subset \mathbf{E}_G$. Množine bodov $\mathbf{F}_{RF} = \{A^*_i(\varphi_i, \lambda_i, h_i)\}_{i\in I}$ georeliéfu z reálneho priestoru geografickej sféry je tak v kartografickom zobrazovacom priestore priradená množina bodov $\mathbf{E}_{RF} = \{A^*_i(x_i, y_i, z_i)\}_{i\in I}$ ako jej obraz. V tejto práci nastolený problém výsledne vyjadrujeme v súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z\rangle$.

4. SYSTÉMOVÝ PRÍSTUP KU GEOGRAFICKEJ SFÉRE A JEHO HĽADISKÁ; GEOGRAFICKÁ SFÉRA AKO PRIESTOROVO ORGANIZOVANÝ SYSTÉM $S_G(P, T)$ A JEJ PRIESTOROVO ORGANIZOVANÉ SUBSYSTÉMY S_{FG}(P,T) A S_{AG}(P,T)

Geografická sféra v jej vymedzenom geometrickom reálnom priestore pozostáva z uvedených geosfér ako jej základných zložiek. Ako celok nie je však iba množinou týchto sfér a ich vzájomného priestorového prieniku, ale rovnako sú zároveň podstatné všetky vzájomné vzťahy medzi týmito zložkami (interakcia týchto sfér).

Teória systémov túto ekvivalentnosť významu množiny vzťahov medzi množinou prvkov ľubovoľného objektu (v našom prípade množinu vzťahov medzi množinou základných zložiek geografickej sféry) vzhľadom na samotnú množinu prvkov explicitne vyjadruje zápisom v tvare usporiadanej dvojice **S** = (**A**, **R**), kde **S** je nejaký uvažovaný systém, **A** je množina prvkov, ktoré tento systém tvoria a **R** je množina vzťahov medzi týmito prvkami.

Teória systémov umožňuje každý ľubovoľný objekt študovať z rôznych hľadísk, a to tak, že každý objekt považuje vždy z určitého hľadiska za celok, pričom každé hľadisko je charakterizované nejakou množinou kritérií. Nech teda ľubovoľný objekt $\mathbf{O}_i$ pozostáva z celkovej množiny prvkov $\mathbf{A} = \left[A_j\right]_{j=1}^{n}$, pričom nech existuje množina hľadísk $\mathbf{L} = \left[L_i\right]_{i=1}^{s}$ tak, že každé hľadisko $L_i \in \mathbf{L}$ je dané množinou kritérií $\mathbf{K}_i$. Na tomto základe môžeme pre každé $L_i \in \mathbf{L}$ z množiny **A** vytvoriť príslušnú podmnožinu vybraných prvkov $\mathbf{A}_i = \left[A_j\right]_{j=1}^{n_j} \subset \mathbf{A}$ tak, že medzi nimi navzájom existuje množina vzťahov $\mathbf{R}_i$, pričom platí, že

$$\bigcup_{i=1}^{s} \mathbf{A}_i = \mathbf{A} \text{ a zároveň } \bigcap_{i=1}^{s} \mathbf{A}_i \neq \varnothing.$$

Potom každému hľadisku $L_i \in \mathbf{L}$ zodpovedá na danom objekte nejaký systém $\mathbf{S}_i = (\mathbf{A}_i, \mathbf{R}_i)$. Je zrejmé, že v krajnom prípade $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}$, takže $\mathbf{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{R})$. Tento princíp platí pre všetky rozlišovacie úrovne.

V tomto zmysle to platí aj pre geografickú sféru. Pri jej štúdiu ako objektu môžeme na ňu zaviesť práve toľko systémov, z koľkých hľadísk $L_i \in \mathbf{L}$ ju môžeme ako celok študovať.

Geografickú sféru je teda z hľadiska teórie systémov a geosystémov možno všeobecne študovať ako priestorovo organizovaný celoplanetárny systém $\mathbf{S}_G(P, T)$ vyjadrený v tvare usporiadanej dvojice

$$\mathbf{S}_G(P, T) = (\boldsymbol{G}_G(P, T), \mathbf{R}_G(\Delta P, T),$$

kde $\boldsymbol{G}_G(P, T)$ je množina priestorovo lokalizovaných prvkov tvoriacich systém $\mathbf{S}_G(P, T)$, $\mathbf{R}_G(\mathrm{D}P, T)$ je množina závislostí a to jednak medzi prvkami množiny $\boldsymbol{G}_G(P, T)$ a jednak medzi prvkami množiny $\boldsymbol{G}_G(P, T)$ a okolím $\mathbf{g}_0$ systému $\mathbf{S}_G(P, T)$.

***Poznámka* 2.** Význam symbolov P, ΔP, T. Symbol $P = \varphi, \lambda, h$ vyjadruje vzhľadom na referenčnú plochu Zeme absolútnu polohu, pričom v reálnom geometrickom priestore φ vyjadruje geografickú šírku, λ vyjadruje geografickú dĺžku, h vyjadruje výšku v smere normály N k referenčnej ploche, symbol ΔP vyjadruje relatívnu polohu $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$, Δh a symbol T vyjadruje parameter času. V abstraktnom kartografickom zobrazovacom priestore uvažovanom v kartézskej súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z\rangle$, bude však symbol P vyjadrovať absolútnu polohu už v tejto súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z\rangle$, takže $P = x, y, z$ a tak isto bude vyjadrovať aj relatívnu polohu $\Delta P = \Delta x, \Delta y, \Delta z$. Jednojednoznačná operácia zobrazenia zo súradnicovej sústavy $\langle O, \varphi, \lambda, h\rangle$, v ktorej je vzhľadom na referenčnú plochu Zeme definovaný reálny geometrický priestor geografickej sféry, do kartézskej súradnicovej sústavy $\langle O, x, y, z\rangle$, v ktorej je vyjadrený kartografický zobrazovací priestor a opačne, je daná sústavou rovníc
$x = f_1(\varphi, \lambda)$; $y = f_2(\varphi, \lambda)$; $z = f_3(h)$
$\varphi = F_1(x, y)$; $y = F_2(x, y)$; $h = F_3(z)$.
Kartografická báza dát v GIS-e je vyjadrená v kartografickom zobrazovacom 3D priestore, vyjadrenom v súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z\rangle$.

Množina $G_G(P, T)$ pozostáva z dvoch podmnožín, a to z podmnožiny $G_{AG}(P, T)$ reprezentujúcej zložky socio-ekonomickej sféry a podmnožiny $GFG(P, T)$ reprezentujúcej zložky fyzickogeografickej sféry, takže

$$G_G(P, T) = [G_{AG}(P, T), G_{FG}(P, T)], \text{ pričom } G_{AG}(P, T) \bigcap G_{FG}(P, T) \neq \varnothing.$$

Pre podmnožiny $G_{AG}(P, T)$, $G_{FG}(P, T)$ pri zvýšení rozlišovacej úrovne pritom platí, že

$$G_{AG}(P, T) = [G_{ef}(P, T)]_{f=1}^{6}\,;\; G_{FG}(P, T) = [Ga_k(P, T)]_{k=1}^{5},$$

kde $Ge_f\ (P, T)$ sú podmnožiny prvkov reprezentujúce pre jednotlivé $f = 1, 2, \ldots 6$ vnútorne rozlíšené zložky jednotlivých sfér priestorových aktivít človeka a $Ga_k\ (P, T)$ sú podmnožiny reprezentujúce zložky jednotlivých vnútorne rozlíšených základných geosfér prírodnej časti geografickej sféry. Preto pre $Ge_f\ (P, T)$ a $Ga_k\ (P, T)$ pre každé $f = 1, 2, \ldots 6$ a pre každé $k = 1, 2, \ldots 5$ platí, že

$$Ge_f(P, T) = [e_{fi}(P, T)]_{f=1}^{m_f},\; G_{ak}(P, T) = [a_{kj}(P, T)]_{j=1}^{n_k}.$$

Z uvedeného plynie, že jednotlivé podmnožiny $Ge_f\ (P, T) \subset G_{AG}(P, T) \subset G_G(P, T)$ pre jednotlivé ($f = 1, 2, \ldots 6$) reprezentujú vnútorne rozlíšené zložky nasledujúcich jednotlivých sfér priestorových aktivít človeka:

$Ge_1(P, T) = [e_{1i}(P, T)]_{i=1}^{m_1}$ – **lesohospodárska sféra,**

$Ge_2(P, T) = [e_{2i}(P, T)]_{i=1}^{m_2}$ – **poľnohospodárska sféra,**

$Ge_3(P, T) = [e_{3i}(P, T)]_{i=1}^{m_3}$ – **priemyselná sféra,**

$Ge_4(P, T) = [e_{4i}(P, T)]_{i=1}^{m_4}$ – **obytná a sídelná sféra,**

$Ge_5(P, T) = [e_{5i}(P, T)]_{i=1}^{m_5}$ – **dopravná a komunikačná sféra,**

$Ge_6(P, T) = [e_{6i}(P, T)]_{i=1}^{m_6}$ – **riadiaca sféra a sféra služieb.**

Prvky $e_{fi}(P, T) \in Ge_f\ (P, T)$ reprezentujú jednotlivé rozlíšené komponenty uvedených vnútorne rozlíšených sfér priestorových aktivít človeka.

Jednotlivé podmnožiny $Ga_k\ (P, T) \in G_{AG}(P, T) \subset G_G(P, T)$ pre jednotlivé $k = 1, 2, \ldots, 5$ reprezentujú nasledujúce vnútorne rozlíšené základné geosféry ako zložky prírodnej časti geografickej sféry:

$Ga_1\ (P, T) = [a_{1j}(P, T)]_{j=1}^{n_1}$ – **atmosféra** s jej cirkulačnou sústavou,

$Ga_2\ (P, T) = [a_{2j}(P, T)]_{j=1}^{n_2}$ – **hydrosféra** s jej sústavou povrchových a podzemných vôd,

$Ga_3\ (P, T) = [a_{3j}(P, T)]_{j=1}^{n_3}$ – **vrchné časti litosféry** s ich stavbou a kvartérnym útvarom, ktorý bezprostredne tvorí pôdotvorný substrát,

$Ga_4\ (P, T) = [a_{4j}(P, T)]_{j=1}^{n_4}$ – **pedosféra** s celým spektrom jej pôd a ich vodných režimov,

$Ga_5\ (P, T) = [a_{5j}(P, T)]_{j=1}^{n_5}$ – **biosféra** ako celok spolu s fytosférou a zoosférou.

Prvky $a_{kj}(P, T) \in Ga_k\ (P, T)$ reprezentujú jednotlivé rozlíšené komponenty uvedených základných geosfér prírodnej časti geografickej sféry Krcho, J. (1986, 1990).

Socio-ekonomická sféra je z hľadiska teórie systémov a geosystémov študovaná ako autonómny priestorovo organizovaný subsystém $\mathbf{S}_{AG}(P, T)$ systému $\mathbf{S}_G(P, T)$ a je vyjadrená v tvare usporiadanej dvojice

$$\mathbf{S}_{AG}(P, T) = (\boldsymbol{G}_{AG}(P, T), \mathbf{R}_{AG}(\Delta P, T)),$$

takže môže byť študovaná ako samostatný systém $\mathbf{S}_{AG}(P, T)$. Jednotlivé vnútorne rozlíšené sféry $\boldsymbol{Ge}_f(P, T) \subset \boldsymbol{G}_{AG}(P, T)$ sú študované ako subsystémy

$$\mathbf{S}e_f(P, T) = (\boldsymbol{Ge}_f(P, T), \mathbf{R}e_f(\Delta P, T)), (f = 1, 2, \ldots 6)$$

systému $\mathbf{S}_{AG}(P, T)$, ktorý je autonómnym subsystémom systému $\mathbf{S}_G(P, T)$. Tak isto prírodná časť krajinnej sféry je študovaná ako o priestorovo organizovaný systém

$$\mathbf{S}_{FG}(P, T) = (\boldsymbol{G}_{FG}(P, T), \mathbf{R}_{FG}(\Delta P, T)),$$

ktorý je autonómnym subsystémom systému $\mathbf{S}_G(P, T)$. Jednotlivé vnútorne rozlíšené základné geosféry $\boldsymbol{Ga}_k(P, T) \subset \boldsymbol{G}_{FG}(P, T)$ sú študované ako subsystémy

$$\mathbf{S}a_k(P, T) = (\boldsymbol{Ga}_k(P, T), \mathbf{R}a_k(\Delta P, T)), k = 1, 2, \ldots, 5$$

systému $\mathbf{S}_{FG}(P, T)$, ktorý je autonómnym subsystémom systému $\mathbf{S}_G(P, T)$.

Vo vzťahu ku GIS-om stručne uveďme, že systém $\mathbf{S}_G(P, T)$, jeho subsystémy $\mathbf{S}_{AG}(P, T)$, $\mathbf{S}_{FG}(P, T)$ uvažované ako autonómne navzájom prepojené systémy, sa v každej polohe P a v každom časovom momente T nachádzajú v nejakom celkovom stave vyjadrenom pomocou stavových veličín Z_i. Tieto celkové stavy sú vyjadrené rôznymi množinami stavových veličín zostavenými zo základnej usporiadanej množiny $\mathbf{P}_G$.

Množina $\mathbf{P}_G$ je pritom taká usporiadaná množina, ktorá pozostáva z jednotlivých druhov stavových veličín Z_i, ktoré sa v systéme $\mathbf{S}_G(P, T)$ vyskytujú. Táto usporiadaná množina tvorí parametrickú bázu

$$\mathbf{P}_G = [Z_i]_{i=1}^{n},$$

systému $\mathbf{S}_G(P, T)$. Parametrická báza $\mathbf{P}_G$ je teda akousi abstraktnou abecedou systému $\mathbf{S}_G(P, T)$, ktorej symbolmi sú jednotlivé stavové veličiny $Z_i \in \mathbf{P}_G$. Celkový stav každého prvku systému $\mathbf{S}_G(P, T)$ možno tak vyjadriť v tvare usporiadanej množiny, ktorej prvkami sú vždy vybrané prvky Z_i z množiny $\mathbf{P}_G$. (Krcho , J. 1990).

Systém $\mathbf{S}_{AG}(P, T)$ má tak isto svoju parametrickú bázu $\mathbf{P}_{AG} \subset \mathbf{P}_G$ tvorenú usporiadanou množinou reprezentantov vybraných jednotlivých druhov stavových veličín $Z_i \in \mathbf{P}_G$, ktorá je vyjadrená v tvare

$$\mathbf{P}_{AG} = [Z_i]_{i=1}^{r}, \text{ pričom teda } (\mathbf{P}_{AG} = [Z_i]_{i=1}^{r}) \subset (\mathbf{P}_G = [Z_i]_{i=1}^{n}).$$

Z parametrickej bázy $\mathbf{P}_{AG}$ možno potom pre každé $\boldsymbol{Ge}_f$ vybrať takú podmnožinu

$$\boldsymbol{ZGe}_f = [Z_i]_{i=1}^{r_f} \ (r_f < r), \text{ kde teda } (\boldsymbol{ZGe}_f = [Z_i]_{i=1}^{r_f}) \subset (\mathbf{P}_{AG} = [Z_i]_{i=1}^{r}),$$

ktorá pre každé $f = 1, 2, \ldots, 6$ vyjadruje celkové stavy jednotlivých zložiek $\boldsymbol{Ge}_f \in \boldsymbol{G}_{AG}$ ako prvkov systému $\mathbf{S}_{AG}$. (Krcho, J. 1990).

Celkové stavy $\boldsymbol{ZGe}_f$ a ich stavové veličiny Z_i sú vstupným dátami pre GIS-y.

Systém $\mathbf{S}_{FG}(P, T)$ má tak isto svoju parametrickú bázu $\mathbf{P}_{FG} \subset \mathbf{P}_G$ tvorenú usporiadanou množinou reprezentantov jednotlivých druhov stavových veličín Z_i, kde $\mathbf{P}_{FG} \subset \mathbf{P}_G$ je vyjadrená v tvare

$$\mathbf{P}_{FG} = [Z_j]_{j=1}^{n}\text{, pričom } \mathbf{P}_{FG} \bigcup \mathbf{P}_{AG} = \mathbf{P}_G$$

Z parametrickej bázy $\mathbf{P}_{FG}$ tak isto možno potom pre každé Ga_k vybrať takú podmnožinu

$$ZGa_k = [Z_j]_{j=1}^{m_k} \ (m_k < n),$$

ktorá pre každé $k = 1, 2, ..., 5$ vyjadruje celkové stavy ZGa_k jednotlivých zložiek $Ga_k \in G_{FG}$ ako prvkov systému $\mathbf{S}_{FG}$.

Označme teda celkové stavy systému $\mathbf{S}_G(P, T)$, $\mathbf{S}_{AG}(P, T)$, $\mathbf{S}_{FG}(P, T)$ symbolmi $Z_G(P,T)$, $Z_{AG}(P,T)$, $Z_{FG}(P,T)$. Každý z nich je v zmysle už uvedeného tvorený množinou stavových veličín $Z_i \in \mathbf{P}_G$, takže

$$Z_G(P,T) = [Z_i(P,T)]_{i=1}^{n_G},\ Z_{AG}(P,T) = [Z_i(P,T)]_{i=1}^{n_{AG}},\ Z_{FG}(P,T) = [Z_i(P,T)]_{i=1}^{n_{FG}}.$$

Tak isto celkové stavy subsystémov $Se_f(P, T)$, $Sa_k(P, T)$ sú v každom časovom momente T vyjadrené symbolmi $Ze_f(P,T)$, $Za_k(P,T)$, vyjadrenými množinami stavových veličín

$$Ze_f(P,T) = [Z_i(P,T)]_{i=1}^{r_e},\ Za_k(P,T) = [Z_i(P,T)]_{i=1}^{s_k}$$

(podrobne pozri Krcho, J. 1990, na s. 26-135). Celkové stavy ZGe_f a ich stavové veličiny sú vstupné dáta pre GIS-y.

Uveďme teraz z nášho hľadiska v skratke niektoré základné paralely medzi systémom $\mathbf{S}_G(P, T)$, jeho subsystémami $\mathbf{S}_{AG}(P, T)$, $\mathbf{S}_{FG}(P, T)$, $Se_f(P, T)$, $Sa_k(P, T)$ a všeobecne uvažovaným GIS-om o geografickej sfére. Všeobecne uvažovaný GIS ako systém preto vyjadrime v tvare usporiadanej dvojice GIS $\mathbf{S}_G(P, T) = (\mathbf{O}_G(P, T), \mathbf{R}_{(GIS)\ G}(\Delta P, T))$, kde $\mathbf{O}_G(P, T)$ je množina objektov a k nim priradených atribútov a $\mathbf{R}_{(GIS)\ G}(\Delta P, T)$ je množina vzájomných vzťahov medzi nimi. Ide teda o zobrazenie

$$\mathbf{S}_G(P, T) = (\mathbf{G}_G(P, T), \mathbf{R}_G\ (\Delta P, T) \rightarrow \mathrm{GIS}_{SG}(P, T) = (\mathbf{O}_G(P, T), \mathbf{R}_{(GIS)\ G}(\Delta P, T)).$$

Uvažujme z tohto hľadiska najprv o základných jednojednoznačných zobrazeniach

$$\mathbf{S}_G(P, T) \rightarrow \mathrm{GIS}_{SG(P,T)},\ \ \mathbf{S}_{AG}(P, T) \rightarrow \mathrm{GIS}_{SAG(P,T)},\ \mathbf{S}_{FG}(P, T) \rightarrow \mathrm{GIS}_{SFG(P,T)}$$
$$Se_f(P, T) \rightarrow \mathrm{GIS}_{Sef(P,T)},\ Sa_k(P, T) \rightarrow \mathrm{GIS}_{Sak(P,T)}.$$

V každom z týchto zobrazení sú podľa poradia obsiahnuté nasledujúce zobrazenia:

$$(\mathbf{S}_G(P, T) \rightarrow \mathrm{GIS}_{SG(P,T)}):\ \mathbf{G}_G(P, T) \rightarrow \mathbf{O}_G\ (P, T),\ \mathbf{Z}_G(P,T) \rightarrow \mathbf{A}_{(GIS)\ G}(P,T)$$
$$(\mathbf{S}_{AG}(P, T) \rightarrow \mathrm{GIS}_{SAG(P,T)}):\ \mathbf{G}_{AG}(P, T) \rightarrow \mathbf{O}_{GAG(P,T)}(P, T),\ \mathbf{Z}_{AG}(P,T) \rightarrow \mathbf{A}_{(GIS)\ AG}(P,T)$$
$$(\mathbf{S}_{FG}(P, T) \rightarrow \mathrm{GIS}_{SFG(P,T)}):\ \mathbf{G}_{FG}(P, T) \rightarrow \mathbf{O}_{GFG(P,T)}(P, T),\ \mathbf{Z}_{FG}(P,T) \rightarrow \mathbf{A}_{(GIS)\ FG}(P,T)$$
$$(Se_f(P, T) \rightarrow \mathrm{GIS}_{Sef(P,T)}):\ Ge_f\ (P, T) \rightarrow \mathbf{O}_{Gef(P,T)}\ (P, T),\ Ze_f(P,T) \rightarrow \mathbf{A}_{(GIS)\ ef}(P,T)$$

kde $\mathbf{O}_{G....}$ je množina objektov obsiahnutých v uvažovanom GIS-e a $\mathbf{A}_{(GIS)....}$ je množina atribútov tvorená podmnožinami atribútov priradených k jednotlivým objektom $O_{G....,i} \in \mathbf{O}_{G....}$ v GIS-e. Z formulácie zobrazenia je zrejmé, že v takto teoreticky uvažovaných

GIS-och sú obrazy $\mathbf{O}_{G,...}$ a $\mathbf{A}_{(GIS),...}$ sú identické so svojimi originálmi, takže zobrazenie je izomorfné; príslušné GIS-y za takéhoto predpokladu teoreticky dajú preto odpoveď na množinu všetkých otázok vyplývajúcich z príslušných systémov ako originálov. Tieto GIS-y možno navzájom na rôznych úrovniach integrovať. Tak napr. GIS $_{Sef(P,T)}$)-y pre jednotlivé f = 1, 2,...., 6 možno prepojiť na integrovaný GIS $_{SAG(P,T)}$), GIS $_{Sak(P,T)}$-y možno pre jednotlivé k = 1, 2, ..., 5 prepojiť na integrovaný $GIS_{SFG(P,T)}$, $GIS_{SAG(P,T)}$ možno s $GIS_{SFG(P,T)}$ prepojiť na integrovaný $GIS_{SFG(P,T)}$ atď.

Ak je zobrazenie homomorfné a vzťahuje sa na všetky jednotlivé GIS-y, potom ich možno z hľadiska úplnosti systému $\mathbf{S}_G(P, T)$ integrovať iba za predpokladu, že

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_{(GIS),i}(P,T) = \mathbf{A}_{(GIS)\,G}(P,T) \equiv \mathbf{P}_G = [Z_j]_{j=1}^{n}.$$

Celý problém je načrtnutý čiastočne, a to iba v kontexte s georeliéfom ako subsystémom $\mathbf{S}_{RF}$, a jeho parametrickou bázou $\mathbf{P}_{RF}$. Súčasťou parametrickej bázy $\mathbf{P}_G$ je totiž aj množina morfometrických veličín ako stavových veličín georeliéfu tvoriacich jeho $\mathbf{P}_{RF}$, $\subset \mathbf{P}_G$ a ktoré sú v množine $\mathbf{A}_{(GIS)\,G}(P,T)$ ako podmnožina $\mathbf{A}_{(GIS)\,RF}(P,T)$.

5. GEORELIÉF AKO OSOBITNÝ PRIESTOROVO ORGANIZOVANÝ A PRIESTOROVO DIFERENCOVANÝ SUBSYSTÉM S_{RF} (P, T) SYSTÉMU S_{FG}(P, T); STRUČNÝ NÁČRT DYNAMICKÉHO MODELU GEORELIÉFU A JEHO NAHRADENIE V MIERKE 1 : M_i STATICKÝM MODELOM BEZ PARAMETRA ČASU T

Georeliéf bol v prácach Krcho, J. (1986, 1987, 1990) definovaný ako osobitný dynamický subsystém celoplanetárneho priestorovo organizovaného geosystému $\mathbf{S}_G$ (P, T) = ($\mathbf{G}_G$ (P, T), $\mathbf{R}_G$(ΔP, T)). Vyjadrený bol v tvare usporiadanej dvojice $\mathbf{S}_{RF}$(P, T) = ($\mathbf{G}_{RF}$ (P, T), $\mathbf{R}_{RF}$ (ΔP, T)), kde $\mathbf{G}_{RF}$ (P, T) je množina prvkov ktorými sú dynamické morfometrické veličiny, $\mathbf{R}_{RF}$ (ΔP, T) je množina relácií $\mathbf{G}_{RF}$ (P, T) jednak navzájom medzi morfometrickými veličinami a jednak medzi morfometrickými veličinami a ostatnými subsystémami systému $\mathbf{S}_G$(P, T).

***Poznámka* 3.** V priestore geografickej sféry, uvažovanom vzhľadom na referenčnú plochu Zeme v súradnicovej sústave $<O, \varphi, \lambda, h>$, je georeliéf určený množinou bodov $\mathbf{F}_{RF} = \{A^*_i(\varphi_i, \lambda_i, h_i)\}_{i\in \mathbf{I}}$, ktorá na zemskom povrchu vytvára dynamickú plochu; veličiny O, φ, λ, h, i, $\mathbf{I}$ majú nasledujúci význam: $O \equiv S$ počiatok súradnicovej sústavy, S stred Zeme, φ geografická šírka, λ geografická dĺžka, $\pm h$ výška bodov $A^*_i(\varphi_i, \lambda_i, h_i) \in \mathbf{F}_{RF}$ uvažovaná od referenčnej guľovej plochy Zeme v smere jej normál N_i, $\mathbf{I}$ je indexová množina, pričom i je vhodne volený identifikačný znak pre usporiadanú trojicu $\varphi_i, \lambda_i, h_i$. V abstraktnom kartografickom zobrazovacom priestore je však v zmysle poznámky 1 georeliéf určený v kartézskej súradnicovej sústave $<O, x, y, z>$ množnou $\mathbf{E}_{RF} = \{ A^*_i(x_i, y_i, z_i) \}_{i\in \mathbf{I}}$, kde $\mathbf{I}$ je indexová množina, pričom i je vhodne volený identifikačný znak pre usporiadanú trojicu x_i, y_i, z_i. Množina $\mathbf{E}_{RF} = \{ A^*_i(x_i, y_i, z_i) \}_{i\in \mathbf{I}}$, je obrazom množiny $\mathbf{F}_{RF} = \{A^*_i(\varphi_i, \lambda_i, h_i)\}_{i\in \mathbf{I}}$, a je výsledkom operácie zobrazenia vyjadrenej zobrazovacími rovnicami z poznámky 1.

Táto plocha s jej geometrickými formami je na jednej strane výslednicou procesov prebiehajúcich v geografickej sfére, na druhej strane však tieto procesy spätne ovplyvňuje a vplýva tak na priestorovú diferenciáciu jednotlivých zložiek krajiny ako aj na krajinu ako celok uvažovaný ako priestorovo organizovaný geosystém. V literatúre je táto plocha pomenovaná tiež ako topografická plocha georeliéfu.

Ako dynamická plocha je georeliéf aj s jeho geometriou nehmotnou veličinou; hmotný je iba nositeľ tejto plochy, ktorým sú povrchové vrstvy litosféry a pedosféra. V procesoch prebiehajúcich v geografickej sfére tvary tejto plochy závisia tak od priestorového rozloženia vlastností svojho materiálneho nositeľa.

Úplná definícia takto uvažovaného georeliéfu bola vyjadrená v prácach Krcho, J. (1986, 1990).

V prácach Krcho, J. (1986, 1990, 1992, 1995) a v nadväznosti na ne v prácach Krcho, J., Benová, A. (2002, 2004) bol dynamický model georeliéfu ako osobitný subsystém $\mathbf{S}_{RF}(P, T)$ geografickej sféry vyjadrený v kartografickom 2D a3D zobrazovacom priestore systémom rovníc

$$
\begin{array}{ll}
z = f_{RF,E}(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) & \\
Z_1 = \Psi_1(Z_2, Z_3, \ldots, Z_n) & Z_i = g_i(x, y, z, T) \\
Z_2 = \Psi_2(Z_1, Z_3, \ldots, Z_n) & i = 1, 2, \ldots, n \\
\ldots\ldots & \\
Z_n = \Psi_n(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}), &
\end{array}
\tag{1}
$$

kde $Z_i \in \mathbf{P}_G$ sú premenné, navzájom na sebe závislé stavové veličiny, charakterizujúce v každom časovom momente T stavy jednotlivých základných geosfér (atmosféry, hydrosféry, litosféry, pedosféry a biosféry) geografickej sféry, ktoré sú v interakcii. Tvorené sú kvantitatívnymi fyzikálnymi, fyzikálnochemickými, chemickými, matematicko-štatistickými veličinami. Veličiny Zi tvoria parametrickú bázu (abstraktnú abecedu) geografickej sféry ako priestorovo organizovaného geosystému $\mathbf{S}_G(P, T)$. Prvý diferenciál dz výšky $z = f_{RF,E}(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ bol zo sústavy rovníc (1) výsledne vyjadrený v tvare

$$\mathrm{d}z = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z + F_T\,\mathrm{d}T, \text{ kde} \tag{2}$$

$$
F_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{RF,E}}{\partial Z_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z_j} \frac{\partial g_j}{\partial x} \qquad
F_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{RF,E}}{\partial Z_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z_j} \frac{\partial g_j}{\partial y}
$$

$$
F_z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{RF,E}}{\partial Z_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z_j} \frac{\partial g_j}{\partial z} \qquad
F_T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{RF,E}}{\partial Z_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z_j} \frac{\partial g_j}{\partial T} \tag{3}
$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n$ pričom $(j \neq i)$, tzn., že pre $i = 1, j = 2, 3, \ldots, n$, pre $i = 2, j = 1, 3, \ldots, n, \ldots$ pre $i = n, j = 2, 3, \ldots, n-1$, a druhý diferenciál d^2z bol vyjadrený v tvare

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2z = {} & F_{xx}\mathrm{d}x^2 + F_{yy}\mathrm{d}y^2 + F_{zz}\mathrm{d}z^2 + F_{TT}\,\mathrm{d}T^2 + 2\,F_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\,F_{xz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2\,F_{xT}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}T + \\
& + 2\,F_{yz}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2F_{yT}\mathrm{d}y\mathrm{d}T + 2F_{zT}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}T
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Parciálne derivácie v (2), (3) a v (4) sú dynamickými veličinami, ktoré sa menia v závislosti na premenných veličinách $Z_i \in \mathbf{P}_G$, na polohe x, y, z a teda tak isto sú dynamickými veličinami aj morfometrické veličiny georeliéfu, ktoré sú jeho stavovými veličinami $Z_{RF,i}$. Sú v nich obsiahnuté informácie o vzájomných závislostiach stavových veličín Z_i, o závislostiach Zi na horizontálnej polohe x, y, na vertikálnej polohe z, a na čase T. Sú základom pre vyjadrenie geometrickej štruktúry georeliéfu ako dynamickej plochy v závislosti od prebiehajúcich procesov a ich genézy v priebehu času T.

Georeliéf uvažovaný v zmysle uvedenej definície ako subsystém

$$\mathbf{S}_{RF}(P, T) = (\mathbf{G}_{RF}(P, T), \mathbf{R}_{RF}(P, T))$$

je teda tvorený jednak množinou prvkov

$$G_{RF}(P, T) = [Z_{RF,i}(P, T)]_{i=1}^{n_{RF}},$$

a jednak množinou závislostí $R_{RF}(\Delta P, T)$ navzájom medzi prvkami množiny $G_{RF}(P, T)$ a závislostí medzi prvkami z množiny $G_{RF}(P, T)$ a prvkami množiny $G_{FG}(P, T)$, ktorých stavy sú v každom časovom momente určené množinou stavových veličín Z_i.

Prvkami množiny $G_{RF}(P, T)$ sú nasledujúce vybrané morfometrické veličiny georeliéfu:

$Z_{RF,1}(P, T) \equiv z = f_{RF}(Z_i)$ zo sústavy rovníc (1),
$Z_{RF,2}(P, T) \equiv |\text{grad } z| (P, T)$, t. j. absolútna hodnota gradienta výšok
$Z_{RF,3}(P, T) \equiv \gamma_N (P, T)$, t. j. sklon reliéfu v smere spádových kriviek,
$Z_{RF,4}(P, T) \equiv A_N (P, T)$, t. j. orientácia georeliéfu voči svetovým stranám
$Z_{RF,5}(P, T) \equiv \omega (P, T)$, t. j. normálová krivosť georeliéfu v smere spádových kriviek,
$Z_{RF,6}(P, T) \equiv (K_N)_t$, t. j. normálová krivosť georeliéfu v smere dotyčníc k vrstevniciam,
$Z_{RF,7}(P, T) \equiv K_r$, t. j. horizontálna krivosť georeliéfu,

ktoré sú dynamickými veličinami. Podrobnejšie ich uvedieme neskôr.

Dynamický model georeliéfu vyjadrený sústavou rovníc (1) a uvažovaný v kartografickom zobrazovacom priestore bol potom v mierke 1 : M$_i$ a jej rozlišovacej úrovni U$_i$; **nahradený jeho statickým modelom** tak isto bol formulovaný časový úsek ΔT_{Mi} platnosti statického modelu v závislosti na mierke 1 : M$_i$ a jej rozlišovacej úrovni U$_i$ (Krcho, J. 1986, 1990, 1995, 2001).

Georeliéf ako dynamickú plochu vyjadrenú sústavou rovníc (1) študujeme totiž v kartografickom zobrazovacom priestore vždy v určitej mierke 1 : M$_i$ a jej zodpovedajúcej rozlišovacej úrovni U$_i$ (i = 1, 2...), kde medzi mierkou 1 : M$_i$ a U$_i$ (i = 1, 2...) existuje vysoký stupeň závislosti.

Uvažujme teda vzhľadom na mierku 1 : M$_i$ a jej rozlišovaciu úroveň U$_i$ o časovom intervale ΔT_{Mi}, ktorý z hľadiska kartografickej vyjadriteľnosti priestorových zmien výšok z o hodnoty Δz charakterizuje dĺžku platnosti mierky 1 : M$_i$.

Pokiaľ sú teda v množine bodov $\mathbf{E}_{RF} = \{A^*_i(x_i, y_i, z_i)\}_{i \in I}$ georeliéfu vo zvolenej mierke 1 : M$_i$ (i = 1, 2, ...) priestorové zmeny výšok z o hodnotu Δz v priebehu časového intervalu

$$\Delta T_{Mi} = (T_{Mi(\text{konc})} - T_{Mi(\text{poč})})$$

odpovedajúceho mierke 1 : M$_i$ iba tak veľké (tak malé), že sú pod jej rozlišovaciu úroveň U$_i$, nemá význam o nich uvažovať, pretože ich v danej mierke nemožno vyjadriť;

- $T_{Mi(\text{poč})}$ – vyjadruje zvolený počiatočný časový moment v intervale ΔT_{Mi}, od ktorého počnúc začíname v mierke 1 : M$_i$ zmenu výšok zi o hodnotu Δz sledovať,
- $T_{Mi(\text{konc})}$ – vyjadruje koncový časový moment v intervale ΔT_{Mi}, v ktorom zmena Δz_{Mi} je už tak veľká, že v mierke 1 : M$_i$ začína byť rozlíšiteľná.

Časový interval ΔT_{Mi} je teda časový úsek odpovedajúci mierke 1 : M$_i$ a jej U$_i$, za ktorý sa v danej mierke 1 : M$_i$ priestorová zmena výšok $z_{Mi(\text{poč})}$ o hodnotu Δz_{Mi} dostane na jej rozlišovaciu úroveň U_i. Dĺžka časového intervalu ΔT_{Mi} je pritom nepriamo úmerná mierke $1 : M_i$ a teda aj jej rozlišovacej úrovni U_i, takže pre mierky

$$(1 : M_1) > (1 : M_2) > \ldots > (1 : M_i) \text{ platí, že } \Delta T_{M1} < \Delta T_{M2} < \ldots < \Delta T_{Mi}.$$

Dĺžkou tohto časového intervalu D*TMi* je zároveň v zvolenej mierke $1 : M_i$ určená aj doba aktuálnosti množiny bodov $\mathbf{E}_{RF} = \{A^*_i(x_i, y_i, z_i)\}_{i \in I}$ plochy georeliéfu, pretože zmeny výšok z bodov $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ o hodnoty Δz sú v tomto intervale iba tak veľké, že sú pod rozlišovaciu úroveň U_i. V danej mierke $1 : M_i$ môžeme tak georeliéf na dĺžku tohto časového intervalu ΔT_{Mi} vyjadriť ako statický systém a v sústave rovníc (1) položiť T = const. Vzťahy $Z_i = g_i\,(x, y, z, T)$ v (1) nadobudnú pre T = const. tvar $Z_i = g_i$ $(x, y, z, T = \text{const.})$, takže stavové veličiny Z_i v sústave rovníc (1) budú pre T = const. iba funkciou polohy x, y, z. V takom prípade parciálne derivácie F_T, F_{TT}, F_{xT}, F_{yT}, F_{zT} budú vo vzťahoch (2) a (4) rovné nule, takže vzťahy (2) a (4) nadobudnú tvar

$$\begin{aligned} dz &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \\ d^2z &= F_{xx}dx^2 + F_{yy}dy^2 + F_{zz}dz^2 + 2\,F_{xy}dxdy + 2\,F_{xz}dxdz + 2\,F_{yz}dydz. \end{aligned} \tag{5}$$

a stavové veličiny *Zi* obsiahnuté v parciálnych deriváciách vo vzťahoch (5) sú tak pre T = const. akoby „zamrznuté“. Po dobu $\Delta T_{Mi} < T_{Mi(poč)}, T_{Mi(konc)} >$ sa tak stavové veličiny Z_i a parciálne derivácie s nimi stanú v mierke $1 : M_i$ statickými veličinami.

Ak ďalej vo vzťahoch $Z_i = g_i\,(x, y, z, T)$ v (1) pre zjednodušenie neuvažujeme o vertikálnej závislosti stavových veličín Z_i na výške z a na miesto premennej z zavedieme vhodne volenú konštantu, potom tieto vzťahy nadobudnú tvar $Z_i = g_i\,(x, y, z = \text{const.}, T = \text{const})$, takže parciálne derivácie F_z, F_{xz}, F_{yz}, F_{zz} budú vo vzťahoch (5) rovné nule. Stavové veličiny Z_i a s nimi aj parciálne derivácie F_x, F_y, F_{xy}, F_{xy}, F_{yy} budú tak iba funkciou polohy x, y, takže vzťahy (5) nadobudnú tvar

$$\begin{aligned} dz &= F_x\,dx + F_y\,dy \\ d^2z &= F_{xx}dx^2 + 2\,F_{xy}dxdy + F_{yy}dy^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Tým boli vytvorené korektné podmienky na opis georeliéfu pomocou funkcie dvoch premenných ako statického systému. Nahraďme vo vzťahoch (6) takto uvažované parciálne derivácie *Fx* , *Fy* , *Fxy* , *Fxy* , *Fyy* parciálnymi deriváciami

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} \tag{7}$$

funkcie dvoch premenných vyjadrenej vo všeobecnom tvare

$$z = f(x, y), \text{ resp. } z = z\,(x, y), \tag{8}$$

pre ktoré čo do ich veľkosti a priestorového rozloženia nech platí, že

$$z_x \equiv F_x,\ z_y \equiv F_y,\ z_{xx} \equiv F_{xx}, \equiv F_{xy},\ z_{yy} \equiv F_{yy}. \tag{9}$$

Potom vzťahy (6) budú mať vzhľadom na (9) tvar

$$\begin{aligned} dz &= z_x\,dx + z_y\,dy \\ d^2z &= z_{xx}\,dx^2 + 2\,z_{xy}\,dxdy + z_{yy}\,dy^2 \end{aligned} \tag{10}$$

a funkcia (8) za predpokladu platnosti (9) bude presne opisovať tú istú „zamrznutú“ a teda statickú plochu vyjadrenú množinou bodov $\mathbf{E}_{RF} = \{A^*_i(x_i, y_i, z_i)\}_{i \in I}$, ako ju opisuje sústava rovníc (1) pre z = const., T = const. Parciálne derivácie (7) však bez ohľadu na platnosť (9) už neobsahujú žiadnu informáciu o „zamrznutých" stavových veličinách $Z_i \in \mathbf{P}_G$ obsiahnutú v parciálnych deriváciách F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}, iba sú s nimi v zmysle (9) polohovo a numericky totožné.

Vzhľadom na (9) sú však parciálne derivácie (8) vo zvolenej mierke 1 : M_i a jej rozlišovacej úrovni U_i presným podkladom pre vyjadrenie geometrickej štruktúry plochy statického georeliéfu určenej množinou jeho morfometrických veličín. Tieto morfometrické veličiny sú pritom v intervale ΔTM_i<TM_i(poč), TM_i(konc)> plnohodnotnými, v matematicko-fyzikálnom zmysle korektnými, vstupnými premennými pre vyjadrenie vplyvu georeliéfu na priestorovú diferenciáciu a dynamiku procesov v geografickej sfére.

Georeliéf uvažovaný v mierke 1 : M_i a jej rozlišovacej úrovni U_i bez parametra času T ako statický priestorovo organizovaný systém je vyjadrený v tvare usporiadanej dvojice

$$\mathbf{S}_{RF}(P) = (\mathbf{G}_{RF}(P), \mathbf{R}_{RF}(P)), \text{ kde}$$
$$\mathbf{G}_{RF}(P) = \{z(P), |\text{grad } z|(P), \gamma_N(P), A_N(P), \omega(P), (K_N)_t(P), K_r(P), F_{GRF}(P), \dots\}, \quad (11)$$

pričom v (11)

$$F_{GRF}(P) = \{N_n F(P), N_t F(P), K_r F(P), F(P)\}.$$

Pod geometrickou štruktúrou georeliéfu bez parametra času T, rozumieme množinu geometrických vlastností georeliéfu vyjadrenú množinou morfometrických veličín $\mathbf{G}_{RF}$, medzi ktorými existuje množina závislostí $\mathbf{R}_{RF}$. V ďalších častiach už pre úsporu symbol (P) vynecháme, pričom význam sa nemení, takže

$$\mathbf{G}_{RF} = \{z, |\text{grad } z|, \gamma_N, A_N, \omega, (K_N)_t, K_r, F_{GRF}, \dots\}, \quad (11)$$

kde $F_{GRF} = \{N_n F, N_t F, K_r F, F\}$ a kde prvky z, $|\text{grad } z|$, γ_N, A_N, ω, $(K_N)_t$, K_r sú určené vzťahmi (12), až (17). Vzťahy pre množinu morfometrických veličín georeliéfu ako zvláštneho subsystému $\mathbf{S}_{RF}$ boli formulované v prácach Krcho, J. (1973, 1984, 1986, 1987, 1990).

Matematické vzťahy (12), (13), (14) pre morfometrické veličiny ($|\text{grad } z|$, γ_N, A_N)$\in \mathbf{G}_{RF}$ obsahujú pritom parciálne derivácie prvého rádu a vzťahy (15), (16), (17) pre morfometrické veličiny (ω, $(K_N)_t$, K_r)$\in \mathbf{G}_{RF}$ obsahujú parciálne derivácie nie len prvého, ale aj druhého rádu. Každá z týchto morfometrických veličín charakterizuje určitú časť geometrických vlastností georeliéfu v každom jeho bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$. Preto sú to tzv. bodové morfometrické veličiny (Minár, J. 1998).

Naproti tomu morfometrické veličiny $F_{GRF} \in \mathbf{G}_{RF}$ sú síce v každom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ georeliéfu vyjadrené na základe morfometrických veličín ω, $(K_N)_t$, K_r, avšak majú už iný význam: vyjadrujú geometrické formy georeliéfu, ktorými je georeliéf rozčlenený do jednotlivých plošných areálov. Sú to preto tzv. plošné morfometrické veličiny (Minár, J. 1998). Pritom geometrické formy georeliéfu $N_n F$, $N_t F$, $K_r F \in F_{GRF} \subset \mathbf{G}_{RF}$ sú v každom jeho bode $A_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ kvantitatívne charakterizované iba jednou z veličín ω, $(K_N)_t$, K_r a geometrické formy F sú v zmysle prác Krcho, J. (1973, 1984, 1986, 1990) v každom jeho bode $A_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ kvantitatívne charakterizované usporiadanou dvojicou (ω, K_r), resp. usporiadanou dvojicou (ω, $(K_N)_t$).

V množine $\mathbf{G}_{RF}$ (11) sa preto jednotlivé morfometrické veličiny navzájom líšia tak významom ako aj vlastnosťami. Význam jej jednotlivých prvkov bol podrobne vyjadrený v citovaných prácach. V potrebnej miere sa ich však z hľadiska cieľa tejto práce dotkneme v jej nasledujúcich častiach.

Morfometrické veličiny v závislosti od rádu parciálnych derivácií vyjadrujú na príslušnej úrovni určitú časť celkovej geometrickej štruktúry georeliéfu. Geometrickú štruktúru georeliéfu vyjadrenú množinou morfometrických veličín $\mathbf{G}_{RF}$, možno tak na základe rádu parciálnych derivácií, obsiahnutých v matematických vzťahoch morfometrických veličín, vnútorne významovo rozlíšiť do jednotlivých úrovní. Na tomto základe rozlíšil a klasifikoval elementárne plochy georeliéfu J. Minár (Minár, J. 1998).

Vyjadrime preto parciálne derivácie podľa ich rádu v tvare množiny

$$\{\{0\}, \{z_x, z_y\}, \{z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}\}, \{ z_{xxx}, z_{xxy}, z_{xyy}, z_{yyy}\}\}$$

tvorenej podmnožinami parciálnych derivácií prvého, druhého a tretieho rádu, pričom podmnožina $\{0\}$ neobsahuje žiadne parciálne derivácie takže je prázdnou podmnožinou.

Z takto uvažovaného hľadiska možno množinu $\mathbf{G}_{RF}$ (11) rozložiť do jednotlivých podmnožín

$$^{(0)}\mathbf{G}_{RF} = \{ z \},\ ^{(1)}\mathbf{G}_{RF} = \{|\text{grad } z|, \gamma_N, A_N,\},\ ^{(2)}\mathbf{G}_{RF} = \{\omega, (K_N)_t, K_r\}, \boldsymbol{F}_{GRF}. \tag{11a}$$

Prvkami množín $^{(0)}\mathbf{G}_{RF}$, $^{(1)}\mathbf{G}_{RF}$, $^{(2)}\mathbf{G}_{RF}$ sú morfometrické veličiny z množiny (11) vyjadrené v závislosti od rádu parciálnych derivácií vystupujúcich v ich matematických vzťahoch.

Množina (11) je základnou množinou. Z hľadiska podrobnejšieho vyjadrenia geometrickej štruktúry georeliéfu ju však možno rozšíriť o ďalšie prvky. Tak množinu $^{(2)}\mathbf{G}_{RF} \subset \mathbf{G}_{RF}$ možno v závislosti od rádu parciálnych derivácií rozšíriť o ďalšie nové prvky D_n, D_t, S_n, S_t, ktoré sú parciálnymi deriváciami prvkov množiny $^{(1)}\mathbf{G}_{RF}$. Ich význam uvedieme ďalej. V zmysle prác Krcho, J. (1990, 1992 – 1993), Jenčo, M. (1992 – 1993), bolo toto rozšírenie z hľadiska geomorfologickej klasifikácie elementárnych foriem georeliéfu vyjadrené v práci Minár, J. (1998). Doplníme ju však aj o prvok D_2, ktorým je diskriminant druhej Gaussovej diferenciálnej formy. Jeho význam pre vyjadrenie geometrickej štruktúry georeliéfu bol v nadväznosti na práce Krcho, J. (1990, 1992, 1999) podrobne vyjadrený v prácach Krcho, J. (1999, 2001).

Zároveň možno množinu $\mathbf{G}_{RF}$ (11) v závislosti od rádu parciálnych derivácií rozšíriť o podmnožinu ďalších morfometrických veličín $^{(3)}\mathbf{G}_{RF}$, tvorenej prvkami, ktorých matematické vzťahy okrem parciálnych derivácií prvého a druhého rádu obsahujú aj podmnožinu parciálnych derivácií tretieho rádu $\{z_{xxx}, z_{xxy}, z_{xyy}, z_{yyy}\}$. Vzťahy pre prvky množiny $^{(3)}\mathbf{G}_{RF}$ boli odvodené v práci Jenčo, M. (1992 – 1993) a pre geomorfologickú klasifikáciu elementárnych foriem georeliéfu vyjadrené v práci Minár, J. (1998). Množinu $\mathbf{G}_{RF}$ (11) možno tak v zmysle poznámky 1 v kartografickom zobrazovacom priestore uvažovanom v kartografickej súradnicovej sústave <O, x, y, z> vyjadriť v tvare

$$\mathbf{G}_{RF,E} = \{^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E},\ ^{(1)}\mathbf{G}_{RF,E},\ ^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E},\ ^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E}, \boldsymbol{F}_{GRF}\}, \tag{11a$_1$}$$

kde pre jednotlivé podmnožiny $^{(i)}\mathbf{G}_{RF,E}, i = 1, 2, 3$, platí, že

$$\begin{gathered} ^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E} = \{z\}; \\ ^{(1)}\mathbf{G}_{RF,E}, = \{|\text{grad } z|, \gamma_N, A_N,\},\ ^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E} = \{D_n, D_t, S_n, S_t, \omega, (K_N)_t, K_r, D_2\} \\ ^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E} = \{D_{nn}, D_{tt}, S_{nn}, S_{tt}, \omega_n, [\mathrm{d}(K_N)_t/\mathrm{d}t], A_{tt}, \equiv (\mathrm{d}K_t/\mathrm{d}t)\}. \end{gathered} \tag{11b}$$

Poznámka 4. Takéto rozlíšenie prvkov množiny $\mathbf{G}_{RF,E}$ ako aj jej rozklad do podmnožín (11a$_1$), (11b) bolo prvý krát vyjadrené v práci MINÁR, J., 1998, morfometrické veličiny ako aj samotné podmnožiny boli však v nej čiastočne vyjadrené inou symbolikou a inými pojmami. Z hľadiska kontinuity s prácami KRCHO, J., 1973, 1984, 1986, 1987, 1990, 1992 – 93, v ktorých bol problém exaktnej morfometrickej analýzy georeliéfu ako osobitného priestorového subsystému $\mathbf{S}_{RF}$ geografickej sféry formulovaný a rozvíjaný, pridržiavame sa symboliky použitej v týchto prácach. Z tohto hľadiska sme pri rozklade množiny $\mathbf{G}_{RF,E}$ použili symboly ${}^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E}$, ${}^{(1)}\mathbf{G}_{RF,E}$, ${}^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E}$, ${}^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E}$.

Novými prvkami v množinách (11b) oproti množinám (11a) sú teda prvky D_n, D_t, S_n, S_t, $D_2 \in {}^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E}$ a všetky prvky množiny ${}^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E}$. Tieto prvky sú deriváciami pôvodných morfometrických veličín $|\text{grad } z|$, γ_N, A_N, ω, $(K_N)_r$, K_r z množiny $\mathbf{G}_{RF,E}$. Hodnoty všetkých morfometrických veličín z podmnožín (11b) množiny $\mathbf{G}_{RF,E}$ (11a1) sú v skalárnej báze funkciou polohy x, y, takže vytvárajú v nej jednotlivé druhy skalárnych polí.

Jednotlivé ${}^{(i)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$, ($i$ = 1, 2, 3) (11b) sú geomorfometrického hľadiska tzv. základné podmnožiny množiny (11a$_1$) i-teho rádu (i = 0, 1, 2, 3) vyjadrujúce jednotlivé úrovne vnútornej geometrickej štruktúry georeliéfu.

6. CHARAKTERISTIKA MORFOMETRICKÝCH VELIČÍN GEORELIÉFU PODĽA JEDNOTLIVÝCH ZÁKLADNÝCH PODMNOŽÍN PRVÉHO, DRUHÉHO A TRETIEHO RÁDU

Množina ${}^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF}$ je jednoprvková; jej prvkom je nadmorská výška georeliéfu z vyjadrená vzťahom (8). V množine parciálnych derivácií jej odpovedá prázdna podmnožina {0}.

Pretože matematický vzťah (8) neobsahuje žiadne parciálne derivácie, je to tzv. morfometrická veličina nultého rádu a množina ${}^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E}$ je z tohto hľadiska nazvaná ako základná množina nultého rádu, čo je vyjadrené indexom (0) na ľavej strane symbolu ${}^{(0)}\mathbf{G}_{RF,E}$ hore.

Množina ${}^{(1)}G_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ z (11b) je tvorená prvkami, ktorých matematické vzťahy obsahujú podmnožinu parciálnych derivácií prvého rádu $\{z_x, z_y\}$, takže sú z geomorfometrického hľadiska morfometrickými veličinami prvého rádu. Množina ${}^{(1)}G_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ je z tohto hľadiska základnou množinou prvého rádu pričom jej prvky majú nasledujúci význam:

$|\text{grad } z|$ – absolútna hodnota gradienta výšok $\text{grad } z = z_x\vec{i} + z_y\vec{j}$ daná vzťahom

$$(dz/dn) = |\text{grad } z| = \text{tg } \gamma_N = \sqrt{z_x^2 + z_y^2}\,, \tag{12}$$

ktorá v skalárnej báze (x, y) skalárneho poľa výšok tvorí skalárne pole.

γ_N – sklon georeliéfu v smere spádnic vyjadrený z $|\text{grad } z|$ vzťahom

$$\gamma_N = arctg(|grad\, z|) = arctg\sqrt{z_x^2 + z_y^2} \tag{13}$$

ktorý v skalárnej báze (x, y) skalárneho poľa výšok tvorí skalárne pole, ktoré má tie isté matematické vlastnosti ako $|\text{grad } z|$. Skalárne pole (12) a teda aj (13) nadobúda extrémne hodnoty v množine inflexných bodov I_f na spádových krivkách. Na túto množinu bodov je tak v skalárnej báze, ako aj na georeliéfe viazaný priebeh izočiar $(K_N)_n \equiv \omega = 0$ (15).

V izočiarovom poli skalárneho poľa γ_N (13) preto izočiara $\omega = 0$ prebieha množinou extrémnych hodnôt $(\gamma_N)_E$.

A_N – orientácia TPG voči svetovým stranám určená smerom vektora –grad z a vyjadrená zo súradníc jeho jednotkového vektora $-\vec{n}^o$, takže

$$A_N = \arccos\left(\frac{-z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{-z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}\right) = \text{arctg.}\left(\frac{z_y}{z_x}\right) \tag{14}$$

Množina $^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ je tvorená prvkami, ktorých matematické vzťahy okrem parciálnych derivácií prvého rádu obsahujú aj podmnožinu parciálnych derivácií druhého rádu $\{z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}\}$, takže sú morfometrickými veličinami druhého rádu. Množina $^{(2)}G_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$ je teda z tohto hľadiska základnou množinou druhého rádu. Z pôvodnej množiny (11) sú jej prvkami veličiny ω, $(K_N)_t$, K_r; rozšírená je však o prvky D_n, D_t, S_n, S_t, ktoré sú deriváciami prvkov z množiny $^{(1)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \mathbf{G}_{RF,E}$. Najprv však uvedieme význam prvkov ω, $(K_N)_t$, K_r z pôvodnej množiny $\mathbf{G}_{RF}$ (11), a až za nimi význam jej nových prvkov D_n, D_t, S_n, S_t. Teda:

$(K_N)_n \equiv \omega$– normálová krivosť TPG v smere spádnic vyjadrená vzťahom

$$(K_N)_n \equiv \omega = -\frac{z_{xx}z_x^2 + 2z_{xy}z_x z_y + z_{yy}z_y^2}{(z_x^2 + z_y^2)\sqrt{(1 + z_x^2 + z_y^2)^3}}, \tag{15}$$

ktorá nadobúda hodnoty $(K_N)_n > 0$, $(K_N)_n = 0$, $(K_N)_n < 0$; hodnoty $(K_N)_n \equiv \omega > 0$ sú na georeliéfe a v jeho skalárnej báze od hodnôt $(K_N)_n \equiv \omega < 0$ navzájom oddelené izočiarou $(K_N)_n \equiv \omega = 0$. Izočiara $(K_N)_n \equiv \omega = 0$ georeliéfe prebieha množinou inflexných bodov na množine jeho spádových kriviek a v izočiarovom poli |grad z| (12) a γ_N (13) prebieha množinou bodov s extrémnymi hodnotami $|\text{grad } z|_E$, $(\gamma_N)_E$.

***Poznámka* 5.** Morfometrická veličina $(K_N)_n \equiv \omega$ má dôležitý interdisciplinárny význam, ktorý bol podrobne uvedený v prácach Krcho, J. (1990, 2001). Jeden z nich spočíva v matematickom opise fyzikálnej stránky priebehu erózno-denudačných procesov na georeliéfe a to pri vyjadrení vektora sily $\vec{F}n = \left(\vec{F}n\right)_x + \left(\vec{F}n\right)_y + \left(\vec{F}n\right)_z$ indukujúcej na georeliéfe pohyb častíc pri povrchovom odtokovom režime vody, pričom jeho zložky sú vyjadrené vzťahmi

$$\left(\vec{F}_n\right)_x = |\vec{F}|\frac{-z_x}{z_x^2 + z_y^2 + 1}\vec{i} = \left(|\vec{F}|\sin\gamma_N.\cos\gamma_N.\cos A_N\right)\vec{i}$$

$$\left(\vec{F}_n\right)_y = |\vec{F}|\frac{-z_y}{z_x^2 + z_y^2 + 1}\vec{j} = \left(|\vec{F}|.\sin\gamma_N.\cos\gamma_N.\sin A_N\right)\vec{j}$$

$$\left(\vec{F}_n\right)_z = |\vec{F}|\frac{-(z_x^2 + z_y^2)}{z_x^2 + z_y^2 + 1}\vec{k} = \left(|\vec{F}|.\sin^2\gamma_N\right)\vec{k}.$$

Polohový vektor $\vec{F}n = \vec{F}\sin\gamma_N$, kde $\vec{F} = m.\vec{g}$, leží v každom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ topografickej plochy georeliéfu zároveň aj v jej dotykovej rovine kolmo na vrstevnicu, tzn. leží v dotyčnici ku spádovej krivke, a je orientovaný na stranu klesajúceho skalára z, $(dz/dn) < 0$. V smere spádových kriviek mení jednak svoju veľkosť $\left|\vec{F}n\right| = \left|\vec{F}\right|\frac{\sqrt{z_x^2+z_y^2}}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}$ a jednak svoj smer. Zmena jeho veľkosti v smere spádových kriviek je vyjadrená vzťahom

$\frac{\delta}{\delta n}\left(\left|\vec{F} n\right|\right)=\left|\vec{F}\right|\left(K_N\right)_n \equiv \left|\vec{F}\right|\omega$, z ktorého priamo vyplýva nie len geometrický, ale aj fyzikálny význam veličiny $(K_N)_n \equiv \omega$ (Krcho, J. (1990, 2001). Práve z tohto hľadiska bola normálová krivosť ω popri horizontálnej krivosti K_r explicitne vyjadrená v matematických vzťahoch opisujúcich dynamiku erózie pôd na georeliéfe v práci Mitáš, L., Mitášová, H. (1998).

$(K_N)_t$ **– normálová krivosť TPG v smere dotyčníc k vrstevniciam** vyjadrená vzťahom

$$\left(K_N\right)_t=-\frac{z_{xx} z_y^2-2 z_{xy} z_x z_y+z_{yy} z_x^2}{\left(z_x^2+z_y^2\right) \sqrt{\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^3}} \tag{16}$$

v ktorom $(K_N)_t$ nadobúda hodnoty $(K_N)_t > 0$, $(K_N)_t = 0$, $(K_N)_t < 0$; hodnoty $(K_N)_t > 0$ sú na georeliéfe a v jeho skalárnej báze od hodnôt $(K_N)_t < 0$ navzájom oddelené izočiarou $(K_N)_t = 0$.

K_r **– horizontálna krivosť georeliéfu** vyjadrená vzťahom

$$K_r=-\frac{z_{xx} z_y^2-2 z_{xy} z_x z_y+z_{yy} z_x^2}{\sqrt{\left(z_x^2+z_y^2\right)^3}}, \tag{17}$$

ktorá nadobúda hodnoty $K_r > 0$, $K_r = 0$, $K_r < 0$, na georeliéfe a v jeho skalárnej báze (x, y) sú hodnoty $K_r > 0$ sú od hodnôt $K_r < 0$ navzájom oddelené izočiarou $K_r = 0$. Z porovnania vzťahov (16) a (17) vyplýva, že pre $(K_N)_t = 0$ a $K_r = 0$ platí, že $(K_N)_t = 0 \equiv K_r = 0$ a je vyjadrené spoločnou rovnicou

$$z_{xx} z_y^2 - 2 z_{xy}\, z_x\, z_y + z_{yy}\, z_x^2 = 0 \tag{17a}$$

V zmysle prác KRCHO, J., 1984, 1986, 1990 medzi normálovou krivosťou v smere dotyčníc k vrstevniciam $(K_N)_t$ a medzi horizontálnou krivosťou K_r existuje závislosť daná vzťahom

$$(K_N)_t = K_r \sin\gamma_N \Rightarrow K_r = (K_N)_t / \sin\gamma_N, \text{ kde } \sin\gamma_N = \sqrt{z_x^2+z_y^2} \,/\, \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,. \tag{17b}$$

Pre všetky body $A^*i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$, v ktorých hodnoty $(K_N)_t \neq 0$ a teda aj $K_r \neq 0$ teda v zmysle vzťahu (17b) platí, že ak je v nich $\gamma_N \neq 0$, potom v nich $(K_N)_t \neq K_r$ (KRCHO, J., 1990, 2001).

Teraz uvedieme význam jej nových prvkov $D_n, D_t, S_n, S_t \in {}^{(2)}\mathbf{G}_{RF.E} \subset \mathbf{G}_{RF.E}$, kde:

$D_n \equiv (d^2z/dn^2)$ **– derivácia |grad z| = tg γ_N v smere spádových kriviek** (v smere dotyčníc n k spádovým krivkám so smerovými uhlami α_n) je určená vzťahom

$$Dn=\frac{\partial}{\partial n}(|grad\ z|) \equiv \frac{d^2 z}{d n^2}=\frac{z_{xx} z_x^2+2 z_{xy} z_x z_y+z_{yy} z_y^2}{z_x^2+z_y^2} \tag{18}$$

ktorý vyjadruje intenzitu zmeny |grad z| v smere spádových kriviek na element dĺžky dn, pričom nadobúda hodnoty $D_n > 0$; $D_n = 0$; $D_n < 0$. Zo vzťahu (18) v porovnaní zo vzťahom (15) vyplýva, že

$$D_n = 0 \equiv \omega = 0 \Rightarrow z_{xx}\, z_x^2 + 2\, z_{xy}\, z_x\, z_y + z_{yy}\, z_y^2 = 0, \tag{19}$$

čo je zároveň rovnica izočiary nulovej normálovej krivosti georeliéfu v smere spádových kriviek. Z porovnania vzťahu (15) so vzťahom (18) avšak vyplýva, že pre $(K_N)_n \equiv \omega \neq 0$ a $D_n \neq 0$, $(K_N)_n \equiv \omega \neq D_n$; Veličina D_n bola odvodená a vzhľadom na veličinu $(K_N)_n \equiv \omega$ bola podrobne interpretovaná a graficky vyjadrená v práci Krcho, J. (2001). Pre izočiaru $D_n = 0 \equiv \omega = 0$ (19) platí, že v skalárnom poli $|\text{grad } z|$ (12) a γ_N (13) prechádza množinou bodov s extrémnymi hodnotami $|\text{grad } z|_E$ resp. $(\gamma_N)_E$.

D_t – derivácia $|\text{grad } z| = \text{tg } \gamma_N$ v smere v smere vrstevníc (v smere dotyčníc t k vrstevniciam so smerovými uhlami $\alpha_t = \alpha_n + 90°$) je určená vzťahom

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(grad\ z\right) = \frac{z_x z_y (z_{xx} - z_{yy}) + z_{xy}(z_y^2 + z_x^2)}{(z_x^2 + z_y^2)}, \tag{20}$$

ktorý vyjadruje zmenu hodnôt skalára $|\text{grad } z|$ o hodnotu $\text{d}|\text{grad } z|$ na element vzdialenosti $\text{d}t$ v horizontálnom smere (v smere dotyčníc k vrstevniciam), pričom na georeliéfe a v jeho skalárnej báze (x, y) nadobúda hodnoty $D_t < 0$, $D_t = 0$, $D_t > 0$. Hodnoty $D_t < 0$ sú od hodnôt $D_t > 0$ navzájom oddelené izočiarou $D_t = 0$ vyjadrenej z (20) v tvare

$$z_x z_y (z_{xx} - z_{yy}) + z_{xy}(z_y^2 - z_x^2) = 0, \tag{21}$$

pričom izočiara $D_t = 0$ (21) prechádza v skalárnom poli $|\text{grad } z|$ množinou jeho extrémnych hodnôt $|\text{grad } z|_E$, avšak s iným priebehom ako izočiara $D_n = 0 \equiv (K_N)_n = 0$ (19).

$S_n \equiv (\text{d}\gamma_N/\text{d}n)$ – derivácia uhla sklonu v smere spádových kriviek určená vzťahom

$$S_n \equiv \frac{d\gamma_N}{dn} = \frac{z_x^2 z_{xx} + 2 z_x z_y z_{xy} + z_y^2 z_{yy}}{(1 + z_x^2 + z_y^2)(z_x^2 + z_y^2)}, \tag{22}$$

ktorá v skalárnej báze (x, y) vyjadruje v oblúkovej miere zmenu uhla γ_N v smere dotyčnice n k ortogonálnej trajektórii o hodnotu $\text{d}\gamma_N$ na element jej dĺžky $\text{d}n$. $S_n \equiv (\text{d}\gamma_N/\text{d}n)$ nadobúda v skalárnej báze hodnoty $S_n < 0$, $S_n = 0$, $S_n > 0$. Hodnoty $S_n < 0$ sú od hodnôt $S_n > 0$ oddelené izočiarou $S_n = 0$. Z porovnania vzťahu (22) so vzťahom (18) vyplýva, že $S_n \equiv \omega = 0$. Z porovnania oboch vzťahov však zároveň vyplýva, že pre hodnoty $S_n \neq 0$ ($S_n > 0 \wedge S_n < 0$) a pre hodnoty $D_n \neq 0$ ($D_n > 0 \wedge D_n < 0$) platí, že $D_n \neq S_n$. Izočiara $S_n \equiv \omega = 0$ na topografickej ploche georeliéfu oddeľuje od seba konvexné časti spádových kriviek od konkávnych a v skalárnom poli $|\text{grad } z|$ (12) ako aj v skalárnom poli γ_N (13) prechádza množinou bodov s extrémnymi hodnotami $|\text{grad } z|_E$ a $(\gamma_N)_E$.

***Poznámka* 6.** V práci Jenčo, M (1992 – 1993) bol vyjadrený nasledujúci súvis medzi veličinou $S_n \equiv (\text{d}\gamma_N/\text{d}n)$ (22) a veličinou $(K_N)_n \equiv \omega$ (15): elementu dĺžky $\text{d}n$ na ortogonálnej trajektórii v skalárnej báze (x, y) odpovedá na spádovej krivke topografickej plochy georeliéfu element dĺžky $\text{d}n_{sp}$, pričom medzi $\text{d}n$ a $\text{d}n_{sp}$ platí, že $(\text{d}n/\text{d}n_{sp}) = \cos \gamma_N = 1/\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$, takže vynásobením vzťahu (22) touto veličinou dostávame vzťah pre normálovú krivosť $\omega \equiv (K_N)_n$ v smere spádových kriviek (15).

$S_t = (\text{d}\gamma_N/\text{d}t)$ – derivácia uhla sklonu γ_N v smere dotyčníc k vrstevniciam vyjadrená vzťahom

$$S_t \equiv \frac{d\gamma_N}{dt} = \frac{z_x z_y (z_{xx} - z_{yy}) + z_{xy}(z_y^2 + z_x^2)}{(1 + z_x^2 + z_y^2)(z_x^2 + z_y^2)}, \tag{23}$$

pričom v oblúkovej miere na ploche georeliéfu a v jeho skalárnej báze vyjadruje zmenu uhla sklonu γ_N v smere dotyčníc t k vrstevniciam. Vyjadruje teda intenzitu zmeny uhla sklonu γ_N (uvažovaného v smere spádových kriviek) na element dĺžky dt v smere vrstevnice. Je teda aj ukazovateľom torzie vrstevnice. V skalárnej báze (x, y) veličina S_t vytvára skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $S_t < 0$, $S_t = 0$, $S_t > 0$. Hodnoty $S_t < 0$ sú v skalárnej báze oddelené od hodnôt $S_t > 0$ izočiarou $S_t = 0$, ktorá je identická s izočiarou $D_t = 0$ vyjadrenou rovnicou (21). Z porovnania vzťahov (23) a (20) však vyplýva, že pre hodnoty $S_t \neq 0$ ($S_t > 0 \wedge S_t < 0$) a pre hodnoty $D_t \neq 0$ ($D_t > 0 \wedge D_t < 0$) platí, že $S_t \neq D_t$. V skalárnom poli |grad z| (12), a γ_N (13) prebieha izočiara $S_t = 0$ množinou bodov s extrémnymi hodnotami $|\text{grad } z|_E$, a $(\gamma_N)_E$.

D_2 – diskriminant druhej Gaussovej diferenciálnej formy vyjadrený vzťahom

$$D_2 = \frac{z_{xx} - z_{xy}^2}{1 + z_x^2 + z_y^2}, \tag{24}$$

ktorým je v skalárnej báze (x, y) určené skalárne pole. Skalár D_2 v nej pritom nadobúda hodnoty $D_2 < 0$, $D_2 = 0$, $D_2 > 0$, kde množina bodov s hodnotami $D_2 < 0$ je od množiny bodov $D_2 > 0$ oddelená izočiarou

$$D_2 = z_{xx} - z_{xy} = 0 \tag{24b}$$

***Poznámka** 7.* V nadväznosti na práce Krcho, J. (1990, 1992 – 1993, 1999, 2001) poznamenajme, že diskriminant D_2 je z hľadiska detailnejšej vnútornej klasifikácie celkových geometrických foriem georeliéfu $F \in \mathbf{G}_{RF}$ (11) dôležitou morfometrickou veličinou, ktorá v infinitezimálnom okolí každého bodu $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ topografickej plochy georeliéfu vyjadruje jej dôležité štruktúrne vlastnosti. Podľa toho aké hodnoty $D_2 < 0$, $D_2 = 0$, $D_2 > 0$ v danom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ topografickej plochy nadobúda, možno jej body rozlíšiť na eliptické, v ktorých je $D_2 > 0$, parabolické, v ktorých je $D_2 = 0$ a hyperbolické, v ktorých je $D_2 < 0$. V tých bodoch $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$, v ktorých je $D_2 > 0$, oskulačný paraboloid nadobúda tvar eliptického paraboloidu a Dupinova indikatrix má tvar elipsy. V bodoch, v ktorých $D_2 = 0$, oskulačný paraboloid nadobúda tvar parabolického valca a Dupinova indikatrix má tvar dvoch paralelných priamok. V bodoch, v ktorých $D_2 < 0$, oskulačný paraboloid nadobúda tvar hyperbolického paraboloidu a Dupinova indikatrix má tvar dvojného súboru hyperbol.

Množina $^{(3)}\mathbf{G}_{RF.E} = \{D_{nn}, D_{tt}, S_{nn}, S_{tt}, \omega_{tt}, [\mathrm{d}(K_N)_t/\mathrm{d}t], A_{tt} \equiv (\mathrm{d}K_t/\mathrm{d}t)\} \subset \mathbf{G}_{RF.E}$ je tvorená prvkami, ktorých matematické vzťahy okrem parciálnych derivácií prvého a druhého rádu obsahujú aj podmnožinu parciálnych derivácií tretieho rádu $\{z_{xxx}, z_{xxy}, z_{xyy}, z_{yyy}\}$, takže jej prvky sú morfometrickými veličinami tretieho rádu. Množina $^{(3)}\mathbf{G}_{RF.E'} \subset \mathbf{G}_{RF.E}$ je z tohto hľadiska potom základnou množinou tretieho rádu. Pre všetky prvky množiny $^{(3)}\mathbf{G}_{RF.E} \subset \mathbf{G}_{RF.E}$ platí, že sú deriváciami prvkov z množiny $^{(2)}\mathbf{G}_{RF.E} \subset \mathbf{G}_{RF.E}$. Teda:

D_{nn} = (d^2|grad z|/d^2n) ≡ d^3z /dn^3 – druhá derivácia absolútnej hodnoty gradienta výšok v smere spádových kriviek určená vzťahom

$$D_{nn} = \frac{\partial^2}{\partial n}\left(|grad\, z|\right) \equiv \frac{d^3 z}{dn^3} = \frac{\left[(A + C + E)J - 2LG)\right]z_x + \left[(B + D + F)J - 2LH\right]z_y}{\sqrt{J^5}}, \tag{25}$$

ktorý vyjadruje veľkosť zmeny prvej derivácie absolútnej hodnoty vektora grad z v smere spádovej krivky na element jej dĺžky dn. Jednotlivé veličiny na pravej strane vzťahu 25) sú vyjadrené v (26a). V skalárnej báze (x, y) veličina D_{nn} vytvára skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $D_{nn} < 0$, $D_{nn} = 0$, $D_{nn} > 0$. Hodnoty $D_{nn} < 0$ sú v skalárnej báze oddelené od hodnôt $D_{nn} > 0$ izočiarou $D_{nn} = 0$, ktorá na topografickej ploche georeliéfu a v jeho skalárnej báze (x, y) prebieha množinou bodov s extrémnymi hodnotami $\omega_{E,max}$ normálovej krivosti georeliéfu v smere spádových kriviek.

$S_{nn} = d^2\gamma_N / dn^2$ – druhá derivácia uhla sklonu v smere spádových kriviek určená vzťahom

$$S_{nn} = \frac{d^2\gamma_N}{dn^2} = \frac{[KJ(A+C+E) - 2LG(1+2J)]z_x + [KJ(B+D+F) - 2LH - (1+2J)]z_y}{K^2\sqrt{J^5}} \tag{26}$$

kde

$$\begin{aligned}
A &= 2\,z_x\,z_{xx}^2 + z_x^2\,z_{xxx};\\
B &= 2\,z_x\,z_{xx}\,z_{xy} + z_x^2\,z_{xxy};\\
C &= 2\,z_y\,z_{xx}\,z_{xy} + 2\,z_x\,z_{xy}^2 + z_x\,z_y\,z_{xyx};\\
D &= 2\,z_y\,z_{xy}^2 + 2\,z_x\,z_{xy}\,z_{yy} + 2\,z_x\,z_y\,z_{xyy};\\
E &= 2\,z_y\,z_{xy}\,z_{yy} + z_y^2\,z_{yyx};\\
F &= 2\,z_y\,z_{yy}^2 + z_y^2\,z_{yyy};\\
G &= z_x\,z_{xx} + z_y\,z_{xy};\\
H &= z_x\,z_{xy} + z_y\,z_{yy};\\
J &= z_x^2 + z_y^2;\\
K &= 1 + z_x^2 + z_y^2;\\
L &= z_x^2\,z_{xx} + 2\,z_x\,z_y\,z_{xy} + z_y^2\,z_{yy};
\end{aligned} \tag{26a}$$

ktorý vyjadrúje veľkosť zmeny prvej derivácie uhla γ_N v smere spádovej krivky na element jej dĺžky dn. Veličina S_{nn} vytvára v skalárnej báze (x, y) skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $S_{nn} < 0$, $S_{nn} = 0$, $S_{nn} > 0$. Tieto sú navzájom oddelené izočiarou $S_{nn} = 0$, ktorá na topografickej ploche georeliéfu a v jeho skalárnej báze (x, y) prebieha množinou bodov s extrémnymi hodnotami blízkymi normálovej krivosti georeliéfu v smere spádových kriviek $\omega_{E,max}$.

$S_{tt} = (d^2\gamma_N / dt^2)$ – druhá derivácia uhla sklonu v smere spádových kriviek γ_N uvažovaná v smere dotyčníc t k vrstevniciam je určená vzťahom

$$S_{tt} = \frac{d^2\gamma_N}{dt^2} = \frac{\left[KJ\,W - 2\,L^{**}H(1+2\,J)\right]z_x + \left[-KJ\,Q + 2\,L^{**}G(1+2\,J)\right]z_y}{K^2\sqrt{J^5}} \tag{27}$$

kde

$$W = (N + P + S + U),\ Q = (M + O + R + T),$$

pričom

$$\begin{aligned}
M &= z_y\,z_{xx}\,z_{yy} + z_x\,z_{xy}\,z_{yy} + z_x\,z_y\,z_{yyx};\\
N &= z_y\,z_{xy}\,z_{yy} + z_x\,z_{yy}^2 + z_x\,z_y\,z_{yyy};\\
O &= -\,z_x\,z_{xx}^2 - z_x\,z_{xy}\,z_{xx} - z_x\,z_y\,z_{xxx};\\
P &= -\,z_y\,z_{xx}\,z_{xy} - z_x\,z_{xx}\,z_{yy} - z_x\,z_y\,z_{xxy};\\
R &= z_x^2\,z_{xyx} + 2\,z_x\,z_{xy}\,z_{xx};\\
S &= z_y^2\,z_{xyy} + 2\,z_x\,z_{xy}^2;\\
T &= -\,z_y^2\,z_{xyx} - 2\,z_y\,z_{xy}^2;\\
U &= -\,z_y^2\,z_{xyy} - 2\,z_x\,z_{xy}\,z_{yy};\\
L^{**} &= z_x z_y (z_{xx} - z_{yy}) + z_{xy}(z_y^2 + z_x^2)
\end{aligned} \tag{27a}$$

a kde koeficienty G, H, J, K sú dané v (26a). Morfometrická veličina S_{tt} vyjadruje veľkosť zmeny veličiny S_t (23) o hodnotu dS_t na element dĺžky dt v smere dotyčnice k vrstevnici. V skalárnej báze (x, y) tvorí skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $S_{tt} < 0$, $S_{tt} = 0$, $S_{tt} > 0$. Tieto sú navzájom oddelené izočiarou $S_{tt} = 0$. V izočiarovom poli $|\text{grad } z|_E$, a $(\gamma_N)_E$ (13) prebieha izočiara $S_{tt} = 0$ množinou jeho inflexných bodov.

ω_n = dω /dn – derivácia normálovej krivosti w v smere spádových kriviek určená vzťahom

$$\omega_n = \frac{d\omega}{dn} = \frac{KJ\left[(A+C+E)z_x + (B+D+F)z_y\right] - L(Gz_x + Hz_y)(2K+3J)}{\sqrt{K^5}\sqrt{J^5}} \tag{28}$$

vyjadruje intenzitu zmeny normálovej krivosti ω v smere spádových kriviek na element dĺžky dn v smere spádovej krivky. V skalárnej báze (x, y) tvorí skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $\omega_n < 0$, $\omega_n = 0$, $\omega_n > 0$. Tieto sú navzájom oddelené izočiarou $\omega_n = 0$. Izočiara $\omega_n = 0$ prechádza na ploche georeliéfu a v skalárnom poli w množinou bodov s extrémnymi hodnotami $(\omega_n)_{E\,(\max,\,\min)}$. V izočiarovom poli $|\text{grad } z|$ (12) a γ_N (13) prebieha množinou jeho inflexných bodov.

A_{tt} = dK_r /dt derivácia horizontálnej krivosti v smere dotyčníc k vrstevniciam určená je vzťahom

$$A_{tt} = \frac{dK_r}{dt} = \frac{\left[(B^* - D + F^*)J - 3L^*H\right]z_x + \left[-(A^* - C + E^*)J + L^*G\right]z_y}{J^3} \tag{29}$$

kde

$$\begin{aligned} B^* &= 2\,z_y\,z_{xx}\,z_{yy} + z_y^2\,z_{xxy}\,;\ A^* = 2\,z_y\,z_{xy}\,z_{xx} + z_y^2\,z_{xxx} \\ F^* &= 2\,z_x\,z_{xy}\,z_{yy} + z_x^2\,z_{yyy}\,;\ E^* = 2\,z_x\,z_{xx}\,z_{yy} + z_x^2\,z_{yyx} \\ L^* &= z_y^2\,z_{xx} - 2\,z_x\,z_y\,z_{xy} + z_x^2\,z_{yy}, \end{aligned} \tag{29a}$$

pričom koeficienty C, D, G, H, J sú vyjadrené v (26a). Morfometrická veličina A_{tt} vyjadruje veľkosť zmeny horizontálnej krivosti K_r o hodnotu dK_r na element dĺžky dt v smere dotyčnice k vrstevnici. V skalárnej báze (x, y) veličina S_{tt} vytvára skalárne pole, v ktorom nadobúda hodnoty $A_{tt} < 0$, $A_{tt} = 0$, $A_{tt} > 0$. Hodnoty $A_{tt} < 0$ sú v skalárnej báze oddelené od hodnôt $A_{tt} > 0$ izočiarou $A_{tt} = 0$. Izočiara $A_{tt} = 0$ prechádza na ploche georeliéfu a v jej skalárnom poli množinou bodov s extrémnymi hodnotami $(K_r)_{E\,(\max,\,\min)}$.

***Poznámka** 8.* Vzťahy (25) až (29) pre morfometrické veličiny D_{nn}, S_{nn}, S_{tt}, ω_n, $A_{tt} \equiv$ (dK_r/dt) sú upravené oproti vzťahom, ktoré boli na základe prác Krcho, J. (1973, 1986, 1990, 1992 – 1993), pre tie isté veličiny odvodené v práci Jenčo, M. (1992 – 1993). Významovo sú však identické.

7. GEOMETRICKÉ FORMY GEORELIÉFU A VYJADRENIE ICH VNÚTORNEJ ŠTRUKTÚRY; KLASIFIKÁCIA CELKOVÝCH GEOMETRICKÝCH FORIEM

Geometrické formy georeliéfu tvoria množinu $F_{GRF} = \{N_nF, N_tF, K_rF, F\}$.

$N_nF \in F_{GRF}$ sú normálové formy georeliéfu v smere spádových kriviek, kvantitatívne charakterizované v každom jeho bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ jednou veličinou, ktorou je ω. Boli vyjadrené na základe veľkosti a znamienka (±) veličiny ω (15) a vo formalizovanom tvare boli vyjadrené v tvare usporiadanej trojice $N_nF = [N_nF_X\ (\omega > 0), N_nF_L(\omega = 0), N_nF_K\ (\omega < 0)]$. Experimentálne boli verifikované a kartograficky vyjadrené v práci Benová, A. (2005) na reliéfe povodia Vápeničného potoka v Malých Karpatoch. Geometrické formy $N_nF = [N_nF_X\ (\omega > 0), N_nF_K\ (\omega < 0)]$ kartograficky vyjadrené v uvedenej práci sú ohraničené izočiarou $w = 0$.

$N_tF \in F_{GRF}$ sú normálové formy georeliéfu v smere dotyčníc k vrstevniciam; v každom jeho bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ sú kvantitatívne charakterizované jednou veličinou, ktorou je $(K_N)_t$ (16). Boli vyjadrené na základe veľkosti a znamienka (±) tejto morfometrickej veličiny $(K_N)_t$ (16) a vo formalizovanom tvare boli zapísané v tvare usporiadanej trojice $N_tF = [N_tF_X\ ((K_N)_t > 0), N_tF_L((K_N)_t = 0), N_tF_K\ ((K_N)_t < 0)]$,

$K_rF \in F_{GRF}$ sú horizontálne formy georeliéfu, v každom jeho bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ kvantitatívne charakterizované jednou morfometrickou veličinou, ktorou je K_r. Boli vyjadrené na základe veľkosti a znamienka (±) tejto veličiny a vo formalizovanom tvare sú vyjadrené v tvare usporiadanej trojice $K_rF = [K_rF_X\ (K_r > 0), K_rF_L(K_r = 0), K_rF_K(K_r < 0)]$.

Vzhľadom na to, že $(K_N)_t = 0) \equiv (\omega = 0)$, formy N_tF sú priestorovo vždy totožné s formami K_rF, avšak v zmysle vzťahov (17b) sú vo vnútri navzájom odlišné.

Geometrické formy N_nF, N_tF, K_rF sú dôležitými parciálnymi charakteristikami georeliéfu. Každá z nich charakterizuje tvar georeliéfu v jeho ľubovoľnom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ veľkosťou a znamienkom jednej morfometrickej veličiny a v jednom smere: N_nF v smere dotyčníc n k spádovým krivkám, a N_tF spolu s K_rF v smere dotyčníc t k vrstevniciam. Spolu teda charakterizujú tvary georeliéfu v dvoch základných smeroch (n, t) určených ortogonálnou sieťou spádových kriviek a vrstevníc. Sú tak podkladom pre vyjadrenie celkových geometrických foriem georeliéfu $F \subset F_{GRF}$.

Celkové geometrické formy georeliéfu $F \subset F_{GRF}$ sú v zmysle uvedeného formy, ktoré sú na základe parciálnych foriem N_nF, N_tF, K_rF v každom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ spojitej ortogonálnej siete kriviek georeliéfu kvantitatívne charakterizované súčasne v dvoch základných na seba kolmých smeroch (n, t) dvomi veličinami vyjadrenými v tvare usporiadanej dvojice (ω, Kr), alebo $(\omega, (K_N)_t)$.

Boli vyjadrené v prácach Krcho, J. (1973, 1984, 1986, 1987, 1990, 2001) a boli formulované na základe karteziánskeho súčinu $\mathrm{F} = \mathrm{N_nF} \times \mathrm{N_tF}$ usporiadaných trojíc $N_nF = [N_nF_X\ (\omega > 0), N_nF_L\ (\omega = 0), N_nF_K\ (\omega < 0)]$, $N_tF = [N_tF_X\ ((K_N)_t > 0), N_tF_L((K_N)_t = 0), N_tF_K\ ((K_N)_t < 0)]$, respektíve karteziánskeho súčinu $\mathrm{F} = \mathrm{N_nF} \times \mathrm{K_rF}$, usporiadaných trojíc $N_nF = [N_nF_X\ (\omega > 0), N_nF_L\ (\omega = 0), N_nF_K\ (\omega < 0)]$, $K_rF = [K_rF_X\ (K_r > 0), K_rF_L(K_r = 0), K_rF_K(K_r < 0)]$. Prvkami týchto karteziánskych súčinov sú usporiadané dvojice, kde každej usporiadanej dvojici bol priradený symbol F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK}, ..., tak, že tvoria usporiadanú množinu

$$F(F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK}, F_{XL}, F_{LX}, F_{KL}, F_{LK}, F_{LL}) \subset \mathbf{G}_{RF,E}\,. \tag{30}$$

Z nich prvé štyri základné celkové formy F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK} boli z povodia Vápeničného potoka v Malých Karpatoch kompletne vyjadrené v práci Benová, A. (2005).

8. KLASIFIKÁCIA CELKOVÝCH GEOMETRICKÝCH FORIEM SO ZAVEDENÍM DISKRIMINANTU DRUHEJ GAUSSOVEJ DIFERENCIÁLNEJ FORMY D_2 AKO KLASIFIKAČNÉHO KRITÉRIA

Vzhľadom na vzájomný súvis medzi veličinami $(K_N)_t$ a K_r vyjadrený vzťahom (17b) možno celkové geometrické formy (30) v každom bode $A^*_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ vyjadriť buď na základe jednej z dvoch dvojíc $(\pm\omega; \pm K_r)$, $(\pm\omega; \pm(K_N)_t)$, alebo na základe oboch usporiadaných dvojíc súčasne. V práci Krcho, J. (2001) bolo kritérium usporiadaných dvojíc (ω, K_r), alebo $(\omega, (K_N)_t)$ doplnené o diskriminant druhej Gaussovej diferenciálnej formy D_2, takže pre celkové geometrické formy (30) platí, že

F_{XX} $[(\omega > 0; (K_N)_t > 0) \wedge (\omega > 0; K_r > 0); (D_2 > 0) \vee (D_2 < 0)]$ konvex-konvexné formy,
F_{KX} $[(\omega < 0; (K_N)_t > 0) \wedge (\omega < 0; K_r > 0); (D_2 < 0)]$ konkáv-konvexné formy,
F_{KK} $[(\omega < 0; (K_N)_t < 0) \wedge (\omega < 0; K_r < 0); (D_2 > 0) \vee (D_2 < 0)]$ konkáv-konkávne formy,
F_{XK} $[(\omega > 0; (K_N)_t < 0) \wedge (\omega > 0; K_r < 0); (D_2 < 0)]$ konvex-konkávne formy,
F_{XL} $[(\omega > 0; (K_N)_t = 0) \wedge (\omega > 0; K_r = 0); (D_2 = 0)]$ konvex-lineárne formy,
F_{LX} $[(\omega = 0; (K_N)_t > 0) \wedge (\omega = 0; K_r > 0); (D_2 = 0)]$ lineár-konvexné formy,
F_{KL} $[(\omega < 0; (K_N)_t = 0) \wedge (\omega < 0; K_r = 0); (D_2 = 0)]$ konkáv-lineárne formy,
F_{LK} $[(\omega = 0; (K_N)_t < 0) \wedge (\omega = 0; K_r < 0); (D_2 = 0)]$ lineár-konkávne formy,
F_{LL} $[(\omega = 0; (K_N)_t < 0) \wedge (\omega = 0; K_r < 0)]$ lineár-lineárne formy.

Zavedenie diskriminantu druhej Gaussovej diferenciálnej formy D_2 do množiny morfometrických veličín $\mathbf{G}_{RF.E}$ a doplnenie klasifikačného kritéria celkových geometrických foriem o diskriminant D_2, umožňuje bližšie rozlíšiť základné vlastnosti celkových geometrických foriem F_{XX} a F_{KK}.

***Poznámka* 9.** V zmysle poznámky 5 pre celkové geometrické formy F_{XX} a F_{KK} platí, že sú tvorené eliptickými bodmi, v ktorých $D_2 > 0$. Na základe diskriminantu druhej Gaussovej diferenciálnej formy D_2 bolo však v práci Krcho, J. (2001) zároveň detailne ukázané, že v celkových geometrických formách F_{XX} a F_{KK} napriek splneniu podmienky $[(\omega > 0; (K_N)_t > 0) \wedge (\omega > 0; K_r > 0)]$ môže diskriminant D_2 okrem hodnôt $D_2 > 0$ nadobúdať aj hodnoty $D_2 < 0$. Každá z celkových geometrických foriem F_{XX}, F_{KK} môže byť teda tvorená jednak podmnožinou bodov v ktorých je $D_2 > 0$ a jednak podmnožinou bodov, v ktorých je $D_2 < 0$. Celková množina bodov tvoriacich formy F_{XX} a F_{KK} teda pozostáva, alebo môže pozostávať z podmnožiny bodov s hodnotami $D_2 > 0$ a z podmnožiny bodov s hodnotami $D_2 < 0$. V podmnožine bodov celkových geometrických foriem F_{XX}, F_{KK} s hodnotami $D_2 < 0$ oskulačný paraboloid nadobúda tvar hyperbolického paraboloidu a Dupinova indikatrix nadobúda tvar dvojného súboru hyperbol tak ako pri formách F_{KX}, F_{XK}, avšak oproti celkovým formám F_{XX}, F_{KK} s jedným zásadným rozdielom. Zatiaľ čo v každom bode z množiny bodov tvoriacich celkové formy F_{KX}, F_{XK} dotyčnica k vrstevnici a dotyčnica ku spádovej krivke prechádza v Dupinovej indikatrix každá vždy iným sektorom vymedzeným jej asymptotami, v tej podmnožine bodov foriem F_{XX}, F_{KK}, v ktorej je $D_2 < 0$, obe dotyčnice prechádzajú spoločne vždy iba jedným sektorom vymedzeným asymptotami Dupinovej indikatrix.

***Poznámka* 10.** Dupinova indikatrix so stredom v ľubovoľnom bode $A'_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ georeliéfu je v jeho skalárnej báze (x, y) so stredom v jemu odpovedajúcom bode A_i (x_i, y_i, z_i) určená parametrickými rovnicami $x = \sqrt{(R_N)_m} \cos\alpha$, $y = \sqrt{(R_N)_m} \sin\alpha$, kde α je premenná veličina, ktorá sa mení v intervale $\langle 0° ; 360°)$, $\sqrt{(R_N)_m}$ je sprievodič, ktorého koncový bod opisuje krivku Dupinovu indikatrix. Extrémne hodnoty polomeru krivosti $(R_N)_E$ 1,2 sú totožné s osami Dupinovej indikatrix. Pre $D_2 < 0$ má Dupinova indikatrix tvar dvojného súboru hyperbol, pričom smernice asymptot $m_{as\ 1,2}$ ako aj tangens uhla $\Delta\alpha$, ktorý asymptoty zvierajú, sú určené vzťahmi

$$m_{as1,2} = \frac{-z_{xy} \pm \sqrt{z_{xy}^2 - z_{xx} z_{yy}}}{z_{xy}}\ ; \ \mathrm{tg}\ \Delta\alpha = \frac{2z_{xy}\sqrt{z_{xy}^2 - z_{xx} z_{yy}}}{z_{xy}^2 - z_x z_y}.$$

Podrobne bol tento problém vyjadrený v prácach Krcho, J. (1990, 1992 – 1993, 2001).

Pre celkové geometrické konvex-konvexné formy a konkáv-konkávne formy F_{XX} $[(\omega > 0;\ (K_N)_t > 0) \wedge (\omega > 0;\ K_r > 0);\ (D_2 > 0)]$, F_{KK} $[(\omega < 0;\ (K_N)_t < 0) \wedge (\omega < 0;\ K_r < 0);\ (D_2 > 0)]$ má teda Dupinova indikatrix v zmysle poznámky 5 a poznámky 7 tvar elipsy a pre F_{XX} $[(\omega > 0;\ (K_N)_t > 0) \wedge (\omega > 0;\ K_r > 0);\ (D_2 < 0)]$, F_{KK} $[(\omega < 0;\ (K_N)_t < 0) \wedge (\omega < 0;\ K_r < 0);\ (D_2 < 0)]$má tvar dvojného súboru hyperbol.

Rozloženie Dupinovej indikatrix v jednotlivých základných celkových geometrických formách F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK} z detailu povodia Vápeničného potoka je v zmysle poznámky 7 a 9 vyjadrené v práci Benová, A. (2005). V uvedenej práci je tak isto na základe podrobnej analýzy v jej textovej časti uvedená vo forme súboru mapových príloh uvedená podrobná dokumentácia o priestorovom priebehu a vzájomnej priestorovej prepojenosti morfometrických veličín

$|\mathrm{grad}\ z|$, γ_N, A_N, D_n, D_t, S_n, S_t, ω, $(K_N)_t$, K_r, D_2, D_{nn}, D_{tt}, S_{nn}, S_{tt}, ω_n, $[\mathrm{d}(K_N)_t/\mathrm{d}t]$, A_{tt}, $\equiv (\mathrm{d}K_r/\mathrm{d}t)$

z podmnožín

$${}^{(1)}\mathbf{G}_{RF,E},\ {}^{(2)}\mathbf{G}_{RF,E},\ {}^{(3)}\mathbf{G}_{RF,E} \subset \boldsymbol{G}_{RF,E} \text{ v (11b).}$$

9. ZÁVER

Profesor RNDr. Michal Lukniš, DrSc., svojou osobnosťou vytvorením podmienok pre existenciu a rozvoj exaktnej geomorfometrickej analýzy a modelovania georeliéfu na Univerzite Komenského v Bratislave výrazne prispel k tomu, že sa na jej Prírodovedeckej fakulte postupne vytvorila teoreticky fundovaná exaktne postavená geomorfologická škola.

Vyjadrenie georeliéfu ako zvláštneho priestorovo organizovaného subsystému $\mathbf{S}_{RF}(P, T)$ krajinnej sféry a modelovanie jeho geometrickej štruktúry pomocou jeho komplexného digitálneho modelu (KDMR) má interdisciplinárny význam. Formulácia množiny morfometrických veličín, vyjadrenie ich matematických vzťahov a KDMR má pre modelovanie georeliéfu a procesov v prostredí informačných technológií Geografických informačných systémov interdisciplinárny aplikačný význam. Preto je KDMR ponímaný ako integrálna súčasť všeobecne uvažovaného GIS-u.

Množina morfometrických veličín vyjadrených vo vzťahoch (12) až (29) reprezentuje geometrickú štruktúru georeliéfu. Tieto veličiny sú zároveň dôležitými veličinami nie len pre samotnú klasifikáciu geometrických foriem georeliéfu a pre vyjadrenie vnútornej štruktúry týchto foriem, ale aj pre štúdium priestorových procesov v krajine, pre interdisciplinárne aplikácie v geovedných a vedecko-technických disciplínach, ako aj pre aplikácie v oblasti projekčnej praxe.

Pretože KDMR je dôležitou integrálnou súčasťou GIS-ov, stručné vyjadrenie paralely medzi geografickou sférou ako priestorovo organizovaným systémom $S_G(P, T)$ s jej zvláštnym subsystémom $S_{RF}(P, T)$ na jednej strane a GIS-mi na druhej strane zároveň teoreticko-metodický význam.

Literatúra

BENOVÁ, A. (2005): *Georeliéf a modelovanie jeho geometrickej štruktúry.* Bratislava : Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta. – Dizertačná práca.

DIKAU, R. (1989): The application of a digital relief model to landform analysis in geomorphology. In Raper, Jonathan ed., *Three Dimensional Applications in Geographical Information Systems.* London : Taylor and Francis, p. 51-77.

DOORNKAMP, J. C., KING, C. A. (1971): *Numerical Analysis in Geomorphology.* New York : St. Martin's Press. 372 pp.

EVANS, I. S. (1972): General geomorphometry derivatives of altitude and descriptive statistics. Spatial analysis in Geomorphology. In Chorley, R. J. (ed), *Spatial Analysis in Geomorphology.* New York : Harper and Row, p. 17-90.

EVANS, I. S. (1979): *An integrated system of terrain analysis and slope mapping.* [Final report on DA-ERO-591-73-G 0040]. Durham : Dpt. of Geogr., Univ. of Durham, England, p. 1-188.

CHORLEY, R. J., KENNEDY, B. A. (1971): *Physical Geography – A Systems Approach.* London : Prentice-Hall International Inc. 370 pp.

CHORLEY, R. J. (1962): Geomorphology and General Systems Theory. U. S. Geological Survey, Professionals Paper 500 B, 10.

JENČO, M. (1992 – 1993): The morphometric analysis of georelief in terms of a theoretical concep- tion of the complex digital model of georelief. In *Acta facultatis rer. nat. Univ. Comenianae, Geographica*, Nr. 33. Bratislava : Univerzita Komenského, p. 133-153.

KRCHO, J. (1964): K problému zostrojenia máp gradientov spádu, máp izoklín, izalumklín a izalumchrón. *Geografický časopis*, 16, 1, 61-75.

KRCHO, J. (1968): Prírodná časť geosféry ako kybernetický systém a jeho vyjadrenie v mape. Geografický časopis 20, 2, 107-129.

KRCHO, J. (1973): Morphometric analysis of relief on the basis of geometric aspect of field theory. In *Acta geographica Universitatis Comenianae, Geogr.-physica*, 1. Bratislava : Slov. pedag. nakladateľstvo, p. 11-233.

KRCHO, J. (1979): Reliéf ako priestorový subsystém SRF geografickej krajiny a jeho komplexný digitálny model. *Geografický časopis*, 31, 3, 237-262.

KRCHO, J. (1983): Teoretická koncepcia a interdisciplinárne aplikácie komplexného digitálneho modelu pri modelovaní dvojdimenzionálnych polí. *Geografický časopis*, 35, 3, 265-291.

KRCHO, J. (1986): Geometrické formy georeliéfu a ich hierarchické úrovne. *Geografický časopis*, 38, 2 – 3, 210-235.

KRCHO, J. (1987): Matematické vlastnosti topografickej plochy georeliéfu z hľadiska morfometrickej analýzy a jej modelovanie pomocou komplexného digitálneho modelu. *Geografický časopis*, 39, 2, 169-204.

KRCHO, J. (1990): *Morfometrická analýza a digitálne modely georeliéfu.* Bratislava : Veda. 426 pp.

KRCHO, J. (1992 – 1993): Georelief and its cartographic modelling by complex digital model (CDM) from geographical information system (GIS) point of view. In *Acta facultatis rerum naturalium Univ. Comenianae, Geographica*, No. 33. Bratislava : Univerzita Komenského, 3-132.

KRCHO, J. (1999): Modelling of georelief using DTM – the influence of point configuration of input points field on positional and numeric accuracy. *Geografický časopis*, 51, 3, 225-260.
KRCHO, J. (2001): *Modelling of Georelief and its Geometrical Structure Using DTM: Positional and Numerical Accuracy*. Bratislava : Q111 Publishers. 336 pp.
KRCHO, J., BENOVÁ, A. (2002): Geometrická štruktúra georeliéfu a jej kartografické vyjadrenie vo vzťahu k elementárnym formám georeliéfu. In *Kartografické listy*, 10. Bratislava : KS SR; GÚ SAV, p. 19-35.
KRCHO, J., BENOVÁ, A. (2004): Georeliéf a jeho geometrická štruktúra: modelovanie georeliéfu s parametrom a bez parametra času. *Geografický časopis*, 56, 1, 3-32.
KRCHO, J., MIČIETOVÁ, E. (1989a): Geoinformačný systém o geografickej sfére a komplexný digitálny model priestorovej štruktúry a jeho integrálna súčasť. *Geografický časopis*, 41, 3, s. 249-273.
KRCHO, J., MIČIETOVÁ, E. (1989b): Geografický informačný systém – štruktúra a úrovne integrity. *Geografický časopis*, 41, 4, s. 369-387.
MIČIETOVÁ, E. (1985): Komplexný digitálny model reliéfu. In KRCHO, J. et al., 1985, *Diaľková detekcia zrážok a dynamický model prírodného prostredia*. Bratislava : Slovenský hydrometeorologický ústav, p. 313-363. – Správa zo štátnej výskumnej úlohy II-5-1-02.
MINÁR, J. (1998): *Georeliéf a geoekologické mapovanie vo veľkých mierkach*. Bratislava : Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského. 185 pp. – Habilitačná práca.
MINÁR, J. (1999): Morfometrická analýza polí a jej využitie v geoekológii. *Geografický časopis*, 51, 3, 261-277.
MITAS, L., MITASOVA, H. (1998): Distributed soil erosion simulation for effective erosion prevention. *Water Resources Research*, 34, 3, 505-516.

Exactly understood geomorphometry of georelief as special subsystem of landscape and its geometrical structure; Professor Michal Lukniš, his merit and impact on its development

Summary

The paper is dedicated to memory of professor Michal Lukniš who has markedly contributed to creating of modern geomorphometric school at the Faculty of Natural Sciences of the Comenius University in Bratislava.

Problem of exact georelief morphometric analysis and mathematical-physically understood classification of total geometric forms of georeliéf is outlined. Georelief was in papers Krcho, J. (1964, 1973,1984, 1986, 1987, 1990) understood considering to the Earth gravitation field, so contour lines and slope curves, which make on it orthogonal network of curves, have both geometric significance and at the same time physical significance. Also the set of morphometric quantities G_{RF} derived from scalar altitudes field on the basis of geometric aspect of field theory, which was formulated by differential geometry apparatus, has the same significance. The spatial georelief geometric structure is than characterised in detail by the set G_{RF}. The classification of total georelief geometric forms is based than on the set of morphometric quantities $\mathbf{G}_{RF}$. The set $\mathbf{G}_{RF}$ thus derived enables than the total geometric forms to analyse and classify in relation to processes on georelief, because the georelief forms genesis is the result of these processes. So from the viewpoint of processes, all the georelief forms have their genesis on the one hand, and their geometry on the other.

Because of the georelief is dynamic system, which we are studying in some scale 1 : M_i and its distinctive level U_i, the whole problem were divided to following points:

- brief input formulation of dynamic georelief model and formulation of concrete criterions for its substitution with static georelief model in the scale 1 : M*i* and its distinctive level U_i without time parameter *T*, as well as the determination of conditions for length of its time validity,
- expression of georelief morphometric quantities, which are forming the set $\mathbf{G}_{RF}$, their inner classification, as well as the dividing of the set $\mathbf{G}_{RF}$ into subsets $(i)\mathbf{G}_{RF}$ (i = 1, 2, 3) considered from viewpoint of partial derivates as input variables in mathematical formulas of particular morphometric quantities,
- expression of georelief total geometric forms, their classification and analysis of inner structure.

On the basis of derived morphometric quantities the total geometric structure of georelief has been modelled in the scale 1 : 10 000 on model area of Vápeničný potok Brook basin in the Malé Karpaty Mountains near Stupava. However, the verification of derived methods was goal of the modelling, too. Also at the same time, positional and numerical accuracy not only of partial morphometric quantities but also georelief total geometric structure of the model area was verified. An experiment showed correctness of methods used. It was elaborated and documented in completeness in work Benová A. (2005).