

MULTIVARIAČNÁ INTERPOLÁCIA PRÍRODNÝCH JAVOV V GEOGRAFICKOM INFORMAČNOM SYSTÉME

Jaroslav Hofierka

*Katedra geografie a regionálneho rozvoja, Fakulta humanitných a prírodných vied
Prešovskej univerzity v Prešove*

Abstract: There are many interpolation methods that can be used for landscape modelling in current geographic information systems. They are used mainly for digital terrain modelling. Relief is a two-dimensional phenomenon modelled by two-dimensional interpolation methods. However, there are spatial phenomena (e.g. climatic, hydrologic) that need to be modelled in three or four dimensions. We present an application of three- and four-dimensional versions of the Regularized Spline with Tension interpolation method (RST) in landscape modelling. Moreover, the multivariate approach enables to model the influence of additional variable on studied phenomenon (e.g. influence of elevation on long-term means of precipitation). The method has several parameters controlling the character of the resulting surface or volume. The method has been implemented in GRASS GIS for two, three and four dimensional cases. The presented examples show the application of the RST method in precipitation and geologic modelling.

Keywords: multivariate interpolation; geographic information system; landscape; modelling

1. ÚVOD

Vo fyzickogeografickej sfére majú všetky komponenty priestorovo a časovo premenlivý charakter. V krajine tak vznikajú rôzne priestorové a dynamické javy, napríklad prúdenie vzdušných mäs a podzemnej vody, zmeny v krajinskej pokrývke, vlhkosti pôdy alebo zmeny georeliéfu. Spojitý charakter komponentov fyzickogeografickej sféry (v danom priestore krajinskej sféry) umožňuje ich reprezentáciu pomocou fyzikálnych polí. Jednotlivé vlastnosti krajiny môžu byť charakterizované fyzikálnymi alebo chemickými veličinami, ktoré vytvárajú skalárne, vektorové alebo tenzorové polia v trojrozmernom priestore, ktoré sa menia aj v čase, a to s rôznou dynamikou. Jedine georeliéf predstavuje dvojrozmernú kontaktnú plochu medzi relevantnými komponentami krajinskej sféry.

Prírodné javy sa často merajú pomocou meraní v určitých lokalitách (bodoch), v ktorých sa zaznamenávajú konkrétne charakteristiky, vlastnosti skúmaného javu. Pri spracovaní týchto údajov, napríklad v mapovej podobe, vzniká problém priestorovej in-

terpolácie meraných hodnôt. Pomocou matematických funkcií sa dopĺňajú hodnoty skúmaného javu v priestore a v čase medzi jednotlivými bodmi meraní. Inými slovami, cez dané body sa preloží funkcia, ktorej priebeh interpoluje skutočné hodnoty javu. Presnosť interpolácie závisí od vstupných bodov (počtu a priestorovej distribúcie) a vlastností matematickej funkcie. Interpolácia môže byť jednodimenzionálna pri preložení krivky cez nakreslené body, alebo môže byť viacdimenzionálna (multivariačná). Práve multivariačná interpolácia má svoj význam pri modelovaní priestorových a dynamických vlastností krajiny.

Interpolácia je matematický problém, ktorý sa riešil už dávnejšej minulosti. Jej adekvátne využitie pri modelovaní javov fyzickogeografickej sféry nie je však triviálne ani v súčasnosti a vyžaduje dobrú znalosť problematiky a tiež modelovaného javu. V súvislosti s nástupom geografických informačných systémov sa interpolácia stala nevyhnutnou súčasťou ich programového vybavenia. Komplexný prehľad aktuálneho stavu v tejto oblasti podávajú Mitas a Mitasova (1999). Cieľom nášho príspevku je poukázať na význam a možnosti využitia multivariačnej interpolácie pri modelovaní javov prírodnej krajiny na príklade interpolačnej metódy regularizovaný splajn s tenziou v geografickom informačnom systéme GRASS.

2. MODELOVANIE KRAJINY V GEOGRAFICKOM INFORMAČNOM SYSTÉME

Geografický informačný systém (GIS) predstavuje v užšom ponímaní softvér, pomocou ktorého môžeme vytvoriť digitálny model krajiny. V súčasných GIS-och prevláda modelovanie krajiny vo forme vrstiev. Každá vrstva predstavuje tematický prvok krajiny, ktorou je možné samostatne narábať a kombinovať ju s inými vrstvami. V mnohých aspektoch je tento prístup podobný práci geografa s klasickými mapami. Ale vzhľadom na možnosti infokomunikačných technológií nemusí ísť len o dvojrozmerný a statický obraz, aký nachádzame napríklad na papierových mapách. V GIS-e je možné využiť všetky možnosti trojrozmerného a dynamického modelovania a vizualizácie. Klasické, papierové mapy majú limitované možnosti modelovania väzieb (procesov) v krajine. Softvérové riešenie a údajové štruktúry umožňujú používateľovi GIS-u modelovať fungovanie procesov pomocou fyzikálnych modelov a ich softvérovej implementácie. Navyše rôzne formy vizualizácie poskytujú omnoho širšie možnosti priamej interakcie vedca-používateľa s údajmi o krajine, resp. s jej modelom (Mitašová et al. 1994). To všetko vytvára veľmi široké možnosti pre nové, inovatívne formy výskumu krajiny.

Pri zobrazovaní spojitých javov krajiny v počítačovom prostredí je nevyhnutné použiť vhodné spôsoby ich reprezentácie. V prípade fyzicko-geografických javov sa v širšom meradle uplatnil rastrový údajový model (formát). Pomocou neho sa modelovaný priestor rozdeľuje na pravidelnú mriežku-grid, ktorej elementárnym prvkom je bunka. K tomuto priestorovému prvku sú priradené ďalšie údaje o krajine (skalárne, vektorové alebo tenzorové hodnoty) vo forme jej atribútu. Rastrový údajový model má rad výhod najmä v súvislosti s kombináciou s inými údajmi (napríklad z oblasti diaľkového prieskumu Zeme), z hľadiska počítačovej implementácie fyzikálnych modelov a modelovania v troch rozmeroch (Hofierka 2003). Vektorový údajový model má širšie uplatnenie v socioekonomickej oblasti a pri vytváraní mapových výstupov.

Interpolácia má významné postavenie pri modelovaní krajiny v GIS-e. Umožňuje odhadnúť neznáme hodnoty skúmaného javu v priestore medzi lokalitami, kde boli vykonané merania. V prípade rastrového údajového modelu sa pomocou interpolačnej funkcie vypočítavajú hodnoty pre stredy buniek rastra vo vybranom časopriestore. Interpolovaný povrch alebo objem tak vytvára model skúmaného javu, ktoré vlastnosti závisia od vstupných údajov a interpolačnej funkcie. Pokiaľ použitá matematická funkcia má vhodné vlastnosti, umožňuje aj výpočet parciálnych derivácií a rôznych parametrov charakterizujúcich lokálne geometrické vlastnosti javu, prípadne poukazujúcich na charakter prebiehajúcich procesov.

Interpolácia je v súčasnosti bežnou operáciou v GIS-e. Využíva sa však najmä v súvislosti s tvorbou digitálneho modelu georeliéfu. Najčastejšími metódami sú metóda inverznej váženej vzdialenosti, krigingové, splajnové metódy a metódy na báze trojuholníkových sietí (Mitas a Mitasova 1999). Vstupnými údajmi sú často vektorizované vrstevnice z topografických máp, fotogrametrické, GPS alebo laserové merania. Keďže ich primárnym určením je tvorba digitálnych modelov georeliéfu, sú to dvojrozmerné implementácie týchto metód. Pri dvojrozmernom modelovaní priestorovo a časovo variačných fyzickogeografických javov tak môže dôjsť ku skresleniam, ktoré znížia presnosť a hodnotu modelovania. Multivariačné metódy interpolácie umožňujú modelovanie skúmaného javu s vhodným počtom dimenzií (dve-až štyri dimenzie), čím sa modelovanie v GIS-e stáva ešte viac približuje skutočnosti a navyše multidimenzionálne údaje umožňujú aplikáciu ďalších fyzikálnych modelov.

3. MULTIVARIAČNÁ INTERPOLÁCIA POMOCOU REGULARIZOVANÉHO SPLAJNU S TENZIOU

Interpoláčny problém je možné všeobecne definovať ako matematickú úlohu, v ktorej je potrebné nájsť takú funkciu, ktorá prechádza danými bodmi. Keďže existuje nekonečné množstvo funkcií, ktoré spĺňajú túto podmienku, je potrebné zaviesť dodatočné podmienky, ktoré určujú charakter interpolácie. Príkladom sú podmienky v geoštatistických metódach (kriging). Výber dodatočnej podmienky závisí od charakteru modelovaného javu a typu aplikácie (Mitas a Mitasova 1999). Preto súčasne GIS-y obsahujú viacero metód, ktoré sa dajú použiť na rôzne typy úloh. Pri ich použití je dôležitá aj ich správna parametrizácia, inak výsledky nemusia zodpovedať možnostiam metódy a očakávaniam. Medzi najčastejšie metódy používané v GIS-e patria metóda inverznej váženej vzdialenosti, metódy na báze trojuholníkových sietí, krigingové metódy a splajnové metódy. Pri splajnových metódach sa za dodatočnú podmienku volí podmienka hladkosti. Medzi známe a používané splajnové metódy patrí *regularizovaný splajn s tenziou* (RST), pôvodne nazývaný *kompletne regularizovaný splajn* (Mitáš a Mitášová 1993; Mitasova et al. 1995). Patrí do triedy radiálnych bázových funkcií a teda patrí medzi tzv. globálne splajny. Splajnová funkcia $S(x)$ spĺňa podmienku minimalizácie odchýlky od zadaných bodov a seminormy hladkosti $I(S)$ (Hofierka et al. 2002):

$$\sum_{j=1}^N |p^{[j]} - S(\mathbf{x}^{[j]})|^2 w_j + w_0 I(S) = \text{minimum} \quad (1)$$

kde $p^{(j)}$ sú zadané (merané) hodnoty v diskrétnych bodoch $\mathbf{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_d^{(j)})$, $j = 1, \dots, N$ v rámci oblasti d -dimenzionálneho priestoru, w_j, w_0 sú kladné váhové faktory a $I(S)$ je miera hladkosti (seminorma hladkosti). V prípade $w_j/w_0 = 0$ funkcia $S(\mathbf{x})$ prechádza presne cez zadané body. Všeobecné riešenie minimalizačného problému definovaného rovnicou (1) je možné vyjadriť ako súčet dvoch komponentov (Talmi a Gilat 1977):

$$S(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N \lambda_j R(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(j)}) \quad (2)$$

kde $T(\mathbf{x})$ je je „trendová“ funkcia, λ_j sú koeficienty a $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(j)})$ je radiálna bázová funkcia, ktorej explicitný tvar závisí od výberu seminormy hladkosti $I(S)$.

V prípade metódy RST táto bola zostavená tak, aby syntetizovala vlastnosti viacerých predtým známych splajnových funkcií (splajn tenkej platne (Duchon 1976), splajn tenkej platne s tenziou (Franke 1985; Mitas a Mitasova 1988), regularizovaný splajn (Mitas a Mitasova 1988)). Medzi tieto vlastnosti patria explicitný tvar, multivariačná formulácia, hladké derivácie vyšších rádov a variačná voľnosť prostredníctvom tenzie a anizotropie.

Seminorma, ktorá spĺňa tieto požiadavky obsahuje derivácie všetkých rádov, ktorých váha sa rýchlo znižuje s rastom rádu derivácie. Pre $d = 2$ má tento tvar:

$$I^2(S) = \sum_{\alpha} B_{\alpha} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} S(\mathbf{x}) \right]^2 dx_1 dx_2 \quad (3)$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ je multiindex ($\alpha_1 = 0, 1, 2, \dots$, $\alpha_2 = 0, 1, 2, \dots$) s $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ a $\{B_{\alpha}\}$ sú nezáporné konštanty. V tomto prípade

$$B_{\alpha} = \begin{cases} 0, & |\alpha| = 0 \\ \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \alpha_2! \varphi^{2|\alpha|} (|\alpha| - 1)!}, & |\alpha| > 0 \end{cases} \quad (4)$$

kde φ je relatívna recipročná váha osobitných členov v sume (nazývaná generalizovaná tenzia) a ktorá umožňuje kontrolovať vplyv derivácií určitého rádu na výslednú funkciu. S týmito koeficientami má RST tento explicitný tvar pre $d = 2, 3, 4$ (Mitasova et al. 1995)

$$S(\mathbf{x}) = a_1 + \sum_{j=1}^N \lambda_j \{- [E_1(\rho) + \ln \rho + C_E]\} \quad d = 2 \quad (5)$$

$$S(\mathbf{x}) = a_1 + \sum_{j=1}^N \lambda_j \left[\sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \operatorname{erf}(\sqrt{\rho}) - 2 \right] \quad d = 3 \quad (6)$$

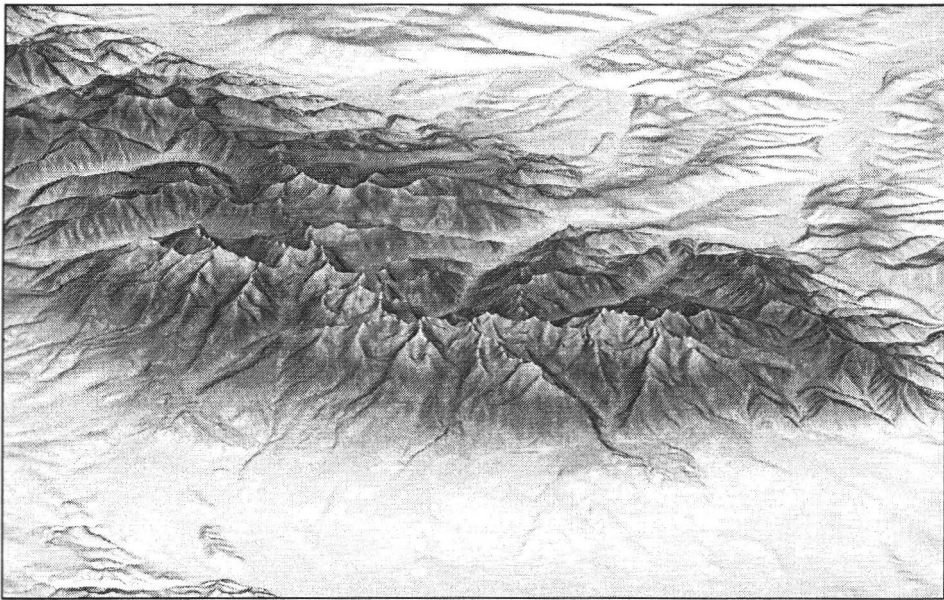
$$S(\mathbf{x}) = a_1 + \sum_{j=1}^N \lambda_j \left[\frac{1 - e^{-\rho}}{\rho} - 1 \right] \quad d = 4 \quad (7)$$

kde $\rho = (\varphi r/2)^2$ a $r^2 = \sum_{i=1}^d (x_i - x_i^{[j]})^2$ štvorec vzdialenosti, $C_E = 0.577215..$ je Eulerova konštanta, $E_i(\cdot)$ je exponenciálna integrálna funkcia a $\text{erf}(\cdot)$ je chybová funkcia (Abramowitz a Stegun 1964). Koefficienty $\alpha_i, \{\lambda_j\}$ sa získajú riešením systému lineárnych rovníc

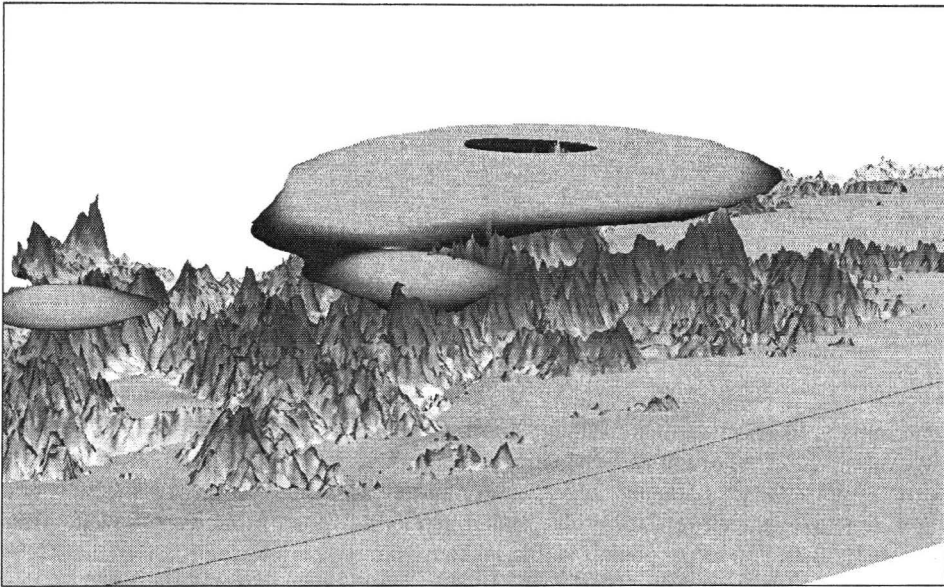
$$a_i + \sum_{j=1}^N \lambda_j [R(\mathbf{x}^{[i]}, \mathbf{x}^{[j]}) + \delta_{ji} w_0/w_j] = z^{[i]} \quad i = 1, \dots, N \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = 0 \quad (9)$$

kde $w = w_0/w_j$ je parameter vyhladenia. Výpočtové nároky na riešenie tohto systému sú obmedzené aplikáciou segmentovaného spracovania v prostredí GIS-u GRASS (Neteler a Mitasova, 2002). To umožňuje spracovať údajové súbory s viac ako stovkami tisíc bodov. Je potrebné poznamenať, že výpočtové nároky sa rapídne zvyšujú pri spracovaní 3- a 4-dimenzionálnych priestorov. Napríklad nároky na spracovanie bežného 2D gridu veľkosti 1000 x 2000 sa pri použití vertikálneho rozmeru a podobného rozlíšenia zväčšia aj stonásobne a pri temporálnych údajoch (4D) až niekoľkotisíc násobne.



Obrázok 1 Dvozmerná interpolácia georeliéfu



Obrázok 2 Trojrozmerná interpolácia dlhodobých úhrnov zrážok

4. IMPLEMENTÁCIA V SYSTÉME GRASS

Geografický informačný systém GRASS je voľne šíriteľný (s voľne dostupným zdrojovým kódom) GIS softvér na báze operačného systému Linux/UNIX. Dostupnosť zdrojového kódu znamená možnosť jeho úprav, využitie doterajších výsledkov, ale nie možnosť zneužitia softvéru. Autorské práva tvorcov softvéru sú chránené licenciou GNU GPL (Mitasova a Neteler 2004). Táto filozofia je v protiklade k uzavretému (vlastníckemu) softvéru, kde používateľ má, na základe poskytnutej licencie na používanie, limitované možnosti zásahu do fungovania softvéru. Otvorené systémy stimulujú rýchlejší vývoj a odstraňovanie chýb v softvéri. Aj preto GIS GRASS v poslednom období nachádza čoraz širšie uplatnenie, o čom svedčí aj narastajúci počet používateľov. Osobitný význam má pre oblasť výskumu a vývoja, pretože otvorenosť kódu umožňuje implementáciu nových metód a využitie existujúceho zdrojového kódu systému. Zdrojový kód, ako aj ďalšie informácie o softvéri a aplikáciách sú k dispozícii na adrese <http://grass.itc.it/>.

Metóda RST je v súčasnosti v GIS-e GRASS implementovaná ako príkaz *s.surf.rst* (vo verzii GRASS 5.0 a GRASS 5.3) a *v.surf.rst* (GRASS 5.7) pre 2-D prípad, *s.vol.rst* (GRASS 5.0 a GRASS 5.3) a *v.vol.rst* (GRASS 5.7) pre 3-D prípad. Pre 4-D prípad existuje zatiaľ nepublikovaná verzia *s.volt.rst* pre GRASS 5.3. Každý z týchto príkazov má vlastnú popisnú (manuálovú) stránku na použitie, ktorá je súčasťou softvéru. Pri ich použití je potrebná správna parametrizácia nielen pomocou parametra tenzie a vyhľadania, ale aj ďalších parametrov (minimálna a maximálna vzdialenosť medzi zadanými bodmi, parametre segmentácie, škálovania a anizotropie). Parameter vyhľadania je vhod-

ný najmä pri spracovaní údajových súborov, ktoré obsahujú významnú chybovú zložku („šum“). Pomocou vyhladenia sa síce zhorší presnosť interpolácie v zadaných bodoch, ale v priestore medzi týmito bodmi dochádza k zlepšeniu výsledku (Hutchinson 1995). Keďže charakter modelovaného javu, zdroj a kvalita údajov bývajú rôzne, vhodné je priestorovo premenlivé vyhladzovanie. V prípade RST je možné ho definovať číselnou hodnotou pre každý zadaný bod priamo vo vstupnom súbore. Výber parametrov je možné automatizovať pomocou metódy krížového hodnotenia (cross-validation). Pri tejto metóde sa z daného vstupného údajového súboru vylúči jeden bod a zo zostávajúcich bodov sa vypočíta hodnota povrchu alebo objemu na mieste vylúčeného bodu. Rozdiel medzi skutočnou hodnotou a vypočítanou hodnotou predstavuje chybu predikcie interpolácie v priestore medzi zadanými bodmi. Celá procedúra sa vykonáva pre každý bod v údajovom súbore. Výsledné chyby predikcie sa štatisticky vyhodnocujú. Cieľom vhodnej parametrizácie je potom minimalizovať tieto chyby predikcie.

V tab. 1 je uvedená sumarizácia vstupných a výstupných údajov RST. Znak % označuje interpolovanú hodnotu, vlastnosť krajiny. Súradnice x, y, prípadne aj z predstavujú priestorové súradnice definujúce polohu bodu, súradnica z (len pre 2D) a atribút w predstavujú vlastnosť krajiny, ktorá sa interpoluje. Súradnica t predstavuje čas. V prípade 3D RST sa medzi vstupnými a výstupnými údajmi nachádza aj 2D priesekový grid. Ten sa využíva pri interpolácii s doplnkovou premennou, resp. pri interpolácii javu, ktorý je závislý od reliéfu, alebo jeho parametrov (dlhodobé úhrny zrážok, teplota). Doplnková premenná (v pozícii 3. priestorovej premennej) môže zlepšiť výsledok interpolácie na základe doplnkovej informácie za predpokladu korelačného vzťahu medzi javom a doplnkovou premennou, resp. vyšším rozlíšením získaným z doplnkovej premennej.

Tabuľka 1 Vstupy, výstupy a parametre metódy RST

	Vstupné údaje	Výstupné údaje	Parametre RST
2D RST	(x, y, %z)	2D grid, odchýlky v zadaných bodoch	tenzia, vyhladzovanie, minimálna a maximálna vzdialenosť bodov, maximálny počet bodov v segmente, minimálny počet použitých bodov pre výpočet segmentu, uhol a škálovací faktor anizotropie
3D RST	(x, y, z, %w), 2D priesekový grid	3D grid, interpolovaný 2D priesekový grid, odchýlky v zadaných bodoch	tenzia, vyhladzovanie, minimálna a maximálna vzdialenosť bodov, maximálny počet bodov v segmente, minimálny počet použitých bodov pre výpočet segmentu, škálovací faktor pre súradnicu z a hodnotu w
4D RST	(x, y, z, t, %w)	časová séria 3D gridov, odchýlky v zadaných bodoch	tenzia, vyhladzovanie, minimálna a maximálna vzdialenosť bodov, maximálny počet bodov v segmente, minimálny počet použitých bodov pre výpočet segmentu, škálovací faktor pre súradnice z, t a hodnotu w

Na spracovanie 3D údajov používa GIS GRASS vlastné údajové štruktúry definované v knižnici Grid3D. Ich vizualizácia prebieha pomocou interných nástrojov (r3.showdspf, NVIZ) alebo prostredníctvom prepojenia na iný vizualizačný softvér (napr. Vis5D+). Za doteraz málo vyriešené považujeme spracovanie multitemporálnych údajov, pre ktoré neexistuje dostatok efektívnych nástrojov. Chýbajú vhodné údajové štruktúry, špecifické operácie a funkcie v existujúcich vizualizačných nástrojoch. Predpokladáme, že ďalší vývoj tohto systému sa zameria aj tento problém.

5. APLIKÁCIE

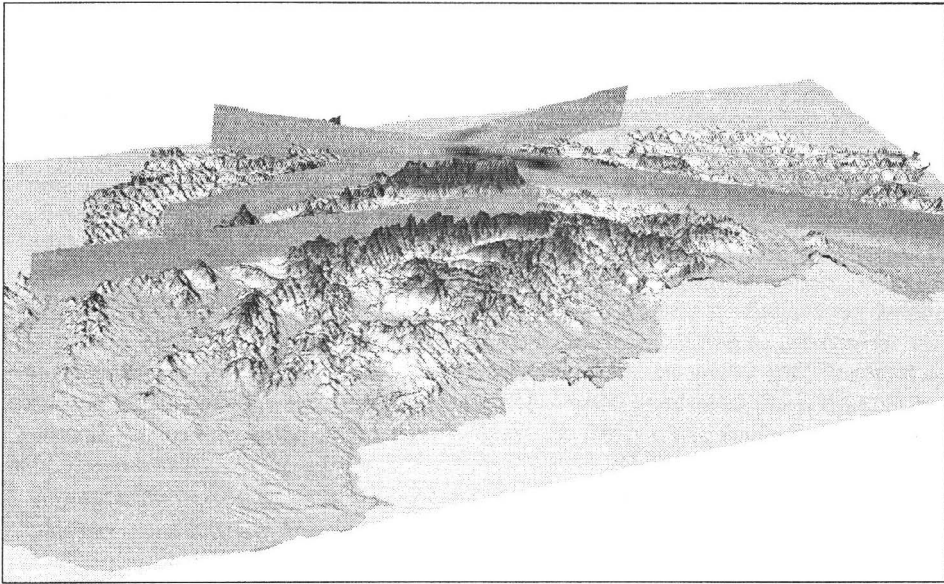
Najčastejším spôsobom využitia interpolácie je tvorba digitálnych modelov georeliéfu. Teoreticko-metodologickým aspektom tvorby digitálnych modelov georeliéfu sa u nás zaoberal najmä Krcho (1990). Georeliéf má významné postavenie v krajinskej sfére, ovplyvňuje nielen prírodné procesy, ale aj mnohé socioekonomické javy. Z toho vyplýva aj mnoho zdrojov a spôsobov získavania vstupných údajov o georeliéfe. Medzi najčastejšie metódy zberu údajov o georeliéfe u nás patrí vektorizácia topografických máp, ale časté je aj použitie fotogrametrických a geodetických meraní. V zahraničí sa však čoraz častejšie využívajú merania pomocou lokalizačnej technológie GPS a radarovej a lidarovej technológie. Predpokladá sa, že letecký a pozemný LIDAR (Light Detection And Ranging) nahradí veľkú časť geodetických a fotogrametrických meraní, pretože dosahované presnosti to v mnohých prípadoch umožňujú. Z hľadiska spracovania takýchto údajov je potom nutné pracovať s veľkým objemom údajov (rádovo až milióny bodov). To zvyšuje nároky na interpolačné metódy a tiež predspracovanie takýchto údajov. Príkladom spracovania veľkého objemu údajov o georeliéfe je digitálny model georeliéfu Slovenskej republiky, kde boli použité vektorizované vrstevnice zo základných máp v mierke 1: 50 000. Základný údajový súbor dosiahol až 16,5 mil. vstupných bodov (Hofierka et al. 1998). Zhrnutie využitia digitálnych modelov georeliéfu v prírodovednej a technickej praxi je uvedené napríklad v prácach (Hofierka et al. 1998) a (Šúri et al. 2003).

Interpolácia sa však môže veľmi efektívne využiť aj pri spracovaní klimatologických ukazovateľov, napríklad pri dlhodobých priemeroch ročných úhrnoch zrážok, teplotách, alebo zákalu atmosféry. V mnohých prípadoch tieto ukazovatele vykazujú koreláciu s georeliéfom. V takom prípade je vhodné použiť 3D interpoláciu tak, aby sa výstupný 2D grid vypočítal v miestach priesekového povrchu (t.j. georeliéfu). Zároveň je možné pracovať aj s výsledným 3D gridom, ktorý je výhodný najmä pri vizualizácii a analýze skúmaného javu.

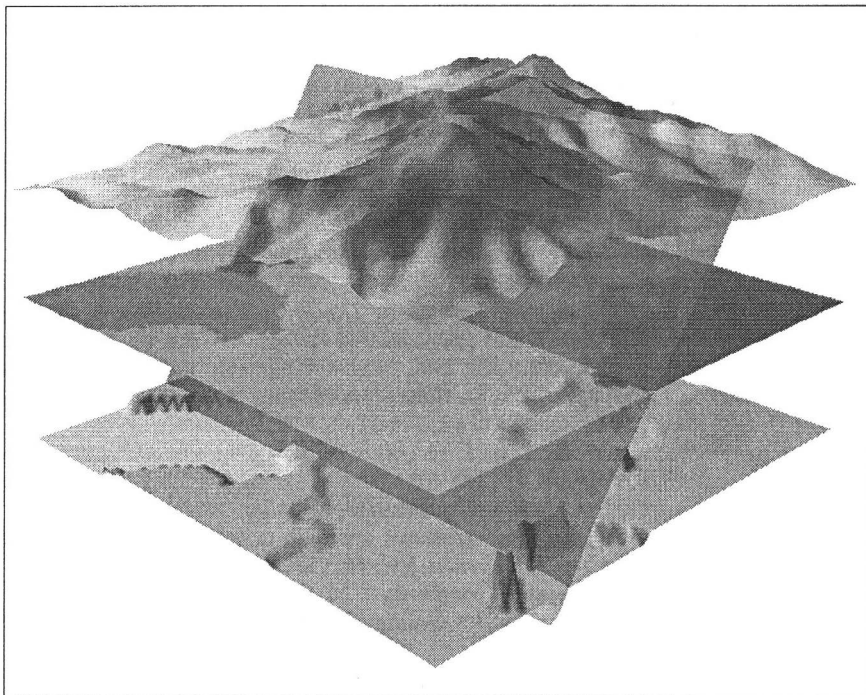
Na obr. 2 a 3 sú znázornené dlhodobé priemery ročných úhrnov zrážok na Slovensku vo forme izopovrchov (obr. 2) a priestorových rezov interpolovaným trojrozmerným objemom (obr. 3). Šúri a Hofierka (2004) uvádzajú príklad využitia multivariačnej interpolácie pri príprave vstupných parametrov pre model priestorovej distribúcie slnečnej radiácie (príkaz *r.sun* GIS-u GRASS).

Medzi ďalšie aplikácie multivariačnej interpolácie patrí modelovanie meteorologických a geologických javov (obr. 4). Pri aplikácii geometrických ukazovateľov (parametrov) priamo z funkcie je možné analyzovať vlastnosti atmosférického a geologického priestoru, potenciály smeru a rýchlosti pohybu, prípadne stavy vnútorného napätia (Pauditš et al. 2000). Medzi najdôležitejšie 3D geometrické ukazovatele patria veľkosť a smer gradientu, priestorová zmena gradientu, Gauss-Kroneckerova a stredná krivosť. Tieto ukazovatele môžu byť súčasťou výstupných 3D gridov. V práci Hofierku (1997) sú tieto geometrické ukazovatele teoreticky vyriešené až pre n-dimenzionálny kartézsky priestor.

4D interpolácia má svoje opodstatnenie pri detailnejšej analýze časových radov meraných údajov. Napríklad meteorologické merania nie sú vždy k dispozícii pre daný rok, najmä ak nejde o permanentnú stanicu. Hodnotu javu pre danú lokalitu môžeme interpolovať z ostatných hodnôt v danom období, alebo môžeme interpolovať nielen v priestore, ale aj v čase.



Obrázok 3 Horizontálny rez a vertikálne rezy interpolovaným objemom reprezentujúcim dlhodobý priemer ročného úhrnu zrážok



Obrázok 4 Kombinácia 2D gridov (viacnásobných povrchov) zobrazených v 3D priestore, znázorňujúcich rozhrania geologických vrstiev.
Zdroj: Hofierka a Pauditš (1999)

5. ZÁVER

V súvislosti s narastajúcim objemom priestorových a multitemporálnych údajov o krajine sa zvyšuje potreba ich spracovania multidimenzionálnymi nástrojmi v GIS-e. Medzi tieto nástroje nepochybne patrí multivariačná interpolácia. Umožňuje modelovať priestorovo a časovo premenlivé javy vrátane vplyvu doplnkových premenných (napr. georeliéfu). Regularizovaný splajn s tenziou predstavuje interpolačnú metódu vhodnú na tento účel. Multivariačná formulácia a vhodná parametrizácia umožňuje optimalizovanú aplikáciu na rad problémov v krajine. Optimalizácia parametrov však vyžaduje určitú skúsenosť používateľa, a preto v ďalšom období je potrebné rozvíjať metódy automatizácie ich výberu, napríklad na báze metódy krížového hodnotenia, alebo geoštatistických techník. Pri vývoji už spomenutých metód je osobitne dôležité implementačné prostredie GIS-u GRASS, ktoré svojou otvorenosťou umožňuje implementáciu nových metód, a tak umožňuje lepšie a rýchlejšie reagovať na aktuálne potreby praxe a výskumu.

Poďakovanie: Autor ďakuje spoločnosti GeoModel, s.r.o., za poskytnutý digitálny model georeliéfu DMR25-SK, ktorý bol použitý pri tvorbe ukážok interpolácie a vedeckej vizualizácie.

Literatúra

- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A. 1964. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, s. 297-300, 228-231.
- DUCHON, J. 1976. Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. R.A.I.R.O. In: *Analysis Numerique*, Vol. 10, 5-12.
- FRANKE, R. 1985. Thin plate spline with tension. In: *Computer Aided Geometrical Design*, Vol. 2, 87-95.
- HOFIERKA, J. 1997. *Modelovanie prírodných javov v prostredí geografického informačného systému*. Dizertačná práca PhD., Bratislava: Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského, 83.
- HOFIERKA, J. 2003. *Geografické informačné systémy a diaľkový prieskum Zeme*. Vysokoškolské učebné texty. Fakulta humanitných a prírodných vied Prešovskej univerzity, 116.
- HOFIERKA J., PARAJKA J., MITASOVA H., MITAS L. 2002. Multivariate Interpolation of Precipitation Using Regularized Spline with Tension. In: *Transactions in GIS*, Vol. 6, 135-150.
- HOFIERKA, J., PAUDITŠ, P. 1999. Do GISov prichádza tretí rozmer. In: *GEInfo*, 5/99, 20-22.
- HOFIERKA, J., ŠŮRI, M., CEBECAUER, T. 1998. Rastrové digitálne modely reliéfu a ich aplikačné možnosti. In: *Acta Facultatis Studiorum Humanitatis et Naturae Universitatis Prešovensis*. Prírodné vedy, Folia Geographica 2, 208-217.
- HUTCHINSON, M. F. 1995. Interpolating mean rainfall using thin plate smoothing splines. In: *International Journal of GIS*, Vol. 9, No. 5, 385-403.
- KRCHO, J. 1990. *Morfometrická analýza a digitálne modely georeliéfu*. Bratislava: Veda.
- MITAS, L., MITASOVA, H. 1988. General variational approach to the interpolation problem. In: *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 16, 983-992.
- MITAS, L., MITASOVA, H. 1999. Spatial Interpolation. In: *P.Longley, M.F. Goodchild, D.J. Maguire, D.W.Rhind (Eds.). Geographical Information Systems: Principles and Applications*, Wiley, 481-492.
- MITASOVA, H., MITAS, L., BROWN, B. M., GERDES, D. P., KOSINOVSKY, I. 1995. Modeling spatially and temporally distributed phenomena: New methods and tools for GRASS GIS. In: *International Journal of GIS*, Vol. 9, No. 4, special issue on integration of Environmental modeling and GIS, 443-446.

- MITASOVA, H., NETELER, M. 2004. GRASS as Open Source Free Software GIS: Accomplishments and Perspectives. In: *Transactions in GIS*, 145-154.
- MITÁŠOVÁ, H., MITÁŠ, L. 1993. Interpolation by Regularized Spline with Tension: I. Theory and Implementation. In: *Mathematical Geology*, Vol. 25, 641-657.
- MITÁŠOVÁ, H., BROWN, W., HOFIERKA, J. 1994. Multidimensional dynamic cartography. In: *Kartografické listy*, 2, 37-50.
- NETELER, M., MITASOVA, H. 2002. *Open Source GIS: A GRASS GIS Approach*. Boston: Kluwer Academic Publisher, 464.
- PAUDITŠ, P., GEDEON, M., HOFIERKA, J., SLANINKA, I., HOK, J., ŠVASTA, J., KORDÍK, J. 2000. *Vývoj trojrozmerného modelu geologickej bariéry*. Záverečná správa etapy. Úloha: Pole vzdialených interakcií. Projekt: Vývoj hlbinného úložiska VJP a VRAO v prostredí Slovenskej republiky pre obdobie r. 1988 – 2000. Bratislava: SGÚDŠ, 248.
- ŠÚRI, M., CEBECAUER, T., HOFIERKA, J. 2003. Digitálne modely reliéfu a ich aplikácie v životnom prostredí. In: *Životné prostredie*, 37, 30-35.
- ŠÚRI, M., HOFIERKA, J. 2004. A New GIS-based Solar Radiation Model and Its Application to Photovoltaic Assessments. In: *Transactions in GIS*, Vol. 8, 175-190.
- TALMI, A., GILAT, G. 1977. Method for Smooth Approximation of Data. In: *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, 93-123.

Summary

Multivariate interpolation of natural phenomena in geographic information system

There are many natural phenomena in landscape that are spatially and temporally distributed. These phenomena have continuous character and can be modelled using physical fields theory. The properties of landscape are often measured in scattered locations. Therefore we need to estimate values of the phenomenon in a space between measured points. Interpolation is a mathematical method that is used to address this problem. There are many interpolation methods used in landscape modelling and geographic information systems. Usually they are used in terrain modelling and therefore formulated and available just in a bi-variate form. However, most natural phenomena are three-dimensional and changing over time, so we need a multivariate formulation of interpolation methods up to four dimensions. We briefly present a mathematical formulation of 2-, 3- and 4-dimensional cases of the Regularized Spline with Tension method (RST) that has been successfully used in modelling various natural phenomena. The method has been implemented in GRASS GIS as `s.surf.rst`, `s.vol.rst` and `s.volt.rst` commands. The RST has many useful properties and parameters that enable a researcher to model spatial and temporal variability of the phenomenon. The influence of other variables on the phenomenon can be modelled as well using a multivariate approach (e.g. influence of elevation on long-term means of precipitation). The presented examples show the application of the RST in terrain, precipitation and geological modelling.